

# MATEMÁTICA

# 4

MARCELO ESTEVAM

# TRIGONOMETRIA

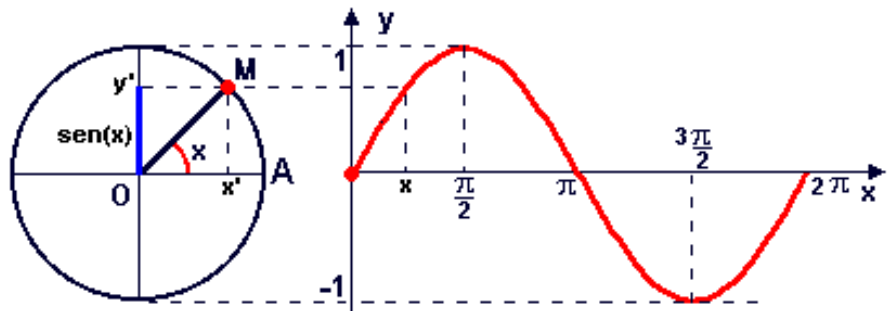
## Funções Trigonômétricas

As funções trigonométricas apresentam uma propriedade muito importante: a **periodicidade**. É por isso que o uso dessas funções se dá, principalmente em problemas da modelagem de fenômenos periódicos ou sazonais. Na física, por exemplo, as funções trigonométricas aparecem no estudo do movimento harmônico simples, no movimento circular uniforme e no movimento ondulatório. Inicialmente, estudaremos cada função padrão,  $\text{sen}(x)$ ,  $\text{cos}(x)$  e  $\text{tg}(x)$ , em seguida suas principais translações.

### Função Seno

É a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \text{sen}(x)$  ou  $y = \text{sen}(x)$ :

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
$\pi$	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$2\pi$	0



$$D = \mathbb{R}$$

$$Im = [-1, 1]$$

$$P = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

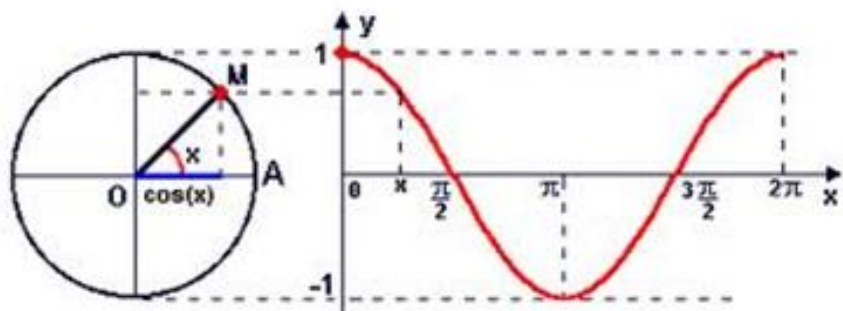
#### Propriedades:

- I. **Positiva** no 1° e 2° quadrantes, **negativa** no 3° e 4° quadrantes;
- II. **Crescente** no 1° e 4° quadrantes, **decrésciente** no 2° e 3° quadrantes;
- III. Ímpar, visto que  $f(-x) = -f(x)$ ;
- IV. Periódica de período  $2\pi$ .

### Função Cosseno

É a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \text{cos}(x)$  ou  $y = \text{cos}(x)$ :

x	y
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
$\pi$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
$2\pi$	1



$$D = \mathbb{R}$$

$$Im = [-1, 1]$$

$$P = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

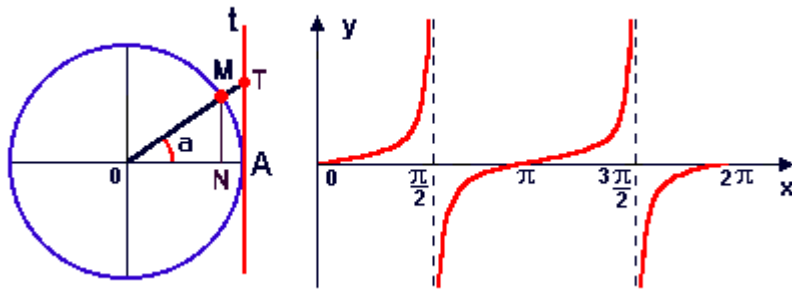
#### Propriedades:

- I. **Positiva** no 1° e 4° quadrantes, **negativa** no 2° e 3° quadrantes;
- II. **Crescente** no 3° e 4° quadrantes, **decrésciente** no 1° e 2° quadrantes;
- III. Par, visto que  $f(-x) = f(x)$ ;
- IV. Periódica de período  $2\pi$ .

## Função Tangente

É a função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \text{tg}(x)$  ou  $y = \text{tg}(x)$ :

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
$\pi$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$
$2\pi$	0



$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{ou} \quad D = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 90^\circ + k180^\circ \text{ com } k \in \mathbb{Z} \}$$

$$Im = \mathbb{R}$$

$$P = \frac{\pi}{|c|} = \frac{\pi}{1} = \pi$$

### Propriedades:

- I. **Positiva** no 1º e 3º quadrantes, **negativa** no 2º e 4º quadrantes;
- II. **Crescente** em cada quadrante;
- III. **Ímpar**, pois  $\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$ ;
- IV. **Periódica** de período  $\pi$ .

## Estudando as funções Cotangente, Secante e Cossecante.

O estudo destas funções pode ser feito através das três funções já estudadas.

### Função Cotangente

Lembrando que  $\cot x = \frac{1}{\tan x}$  podemos concluir que a função é definida por  $f(x) = y = \cot(x)$  tem:

- **Domínio:**  $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ , pois a função cotangente não existe quando a tangente é zero ( $\text{tg}(x) = 0$ ).
- **Imagem:**  $Im(f) = \mathbb{R}$ , pois a função assume esses valores, a partir da imagem da função tangente.
- **Período:**  $P = \pi$ , pois a função possui mesmo período da função tangente.

### Função Secante

Lembrando que  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ , podemos concluir que a função é definida por  $f(x) = y = \sec(x)$  tem:

- **Domínio:**  $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ , pois a função não existe quando a função cosseno é igual a zero ( $\cos(x) = 0$ ).
- **Imagem:**  $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$ , pois a função assume esses valores, a partir da imagem da função cosseno ( $[-1, 1]$ ).
- **Período:**  $P = 2\pi$ , pois a função secante tem o mesmo período da função cosseno.

### Função Cossecante

Lembrando que  $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ , podemos concluir que a função é definida por  $f(x) = y = \csc(x)$  tem:

- **Domínio:**  $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ , pois a função cossecante não existe quando a função seno é igual a zero ( $\sin(x) = 0$ ).
- **Imagem:**  $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$ , pois a função assume esses valores, a partir da imagem da função seno ( $[-1, 1]$ ).
- **Período:**  $P = 2\pi$ , pois a função cossecante tem o mesmo período da função seno.

## Sinais das funções trigonométricas

	1° Q	2° Q	3° Q	4° Q	
sen	+	+	-	-	cossec
cos	+	-	-	+	sec
tg	+	-	+	-	cotg

## Translações das funções seno e cosseno a partir de suas funções padrões.

Esse é o principal motivo de termos definido as funções desta forma:

$$f(x) = a + b \operatorname{sen}(cx + d)$$

$$f(x) = a + b \operatorname{cos}(cx + d)$$

Os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são números reais e representam:

$a$  → translação vertical, a função sobe ( $a > 0$ ) ou desce ( $a < 0$ ) inteira.

$b$  → translação vertical, um aumento do gráfico ( $b > 1$ ) e a redução do gráfico ( $0 < b < 1$ ).  
Também determina a inversão do gráfico ( $b < 0$ ).

$c$  → determina o período, quanto maior  $c$ , menor o período e vice-versa.

$d$  → translação horizontal, o arco somando ( $d > 0$ ) desloca para a esquerda e reduzindo ( $d < 0$ ) desloca para a direita.

**Exemplo:** Em cada caso a seguir, determine o domínio ( $D$ ), a imagem ( $Im$ ) e o período ( $P$ ) de cada uma das funções:

a)  $y = \operatorname{sen}(2x) \rightarrow D = \mathbb{R} \quad Im = [-1, 1] \quad P = \pi$

b)  $y = 18 + 6 \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow D = \mathbb{R} \quad Im = [-18, 54] \quad P = 12$

c)  $y = 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow D = \mathbb{R} \quad Im = [1, 3] \quad P = 4\pi$

d)  $f(x) = \operatorname{tg}(2x) \rightarrow D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\} \quad Im = \mathbb{R} \quad P = \frac{\pi}{2}$

e)  $f(x) = 2 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \pi\right) \rightarrow D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{2} + k3\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\} \quad Im = \mathbb{R} \quad P = 3\pi$

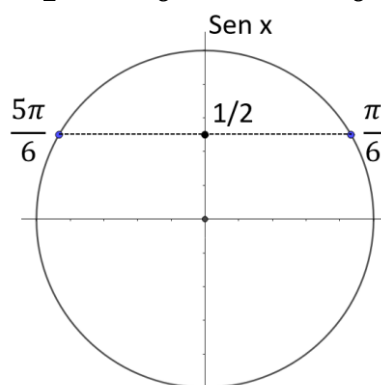
## Equações Trigonômicas

Quando resolvemos uma equação trigonométrica, vamos encontrar dois intervalos:

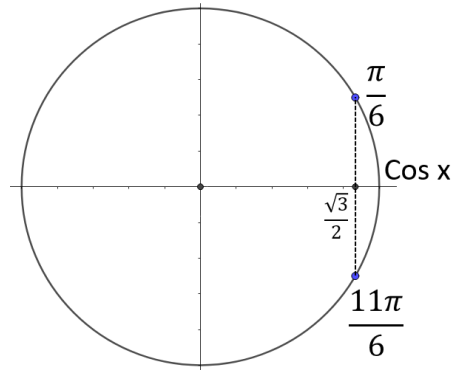
- I.  $[0^\circ, 360^\circ]$  ou  $[0, 2\pi]$
- II. Infinitas voltas ( $\mathbb{R}$ ).

**Exemplo:** Resolva as equações abaixo para as duas condições anteriores:

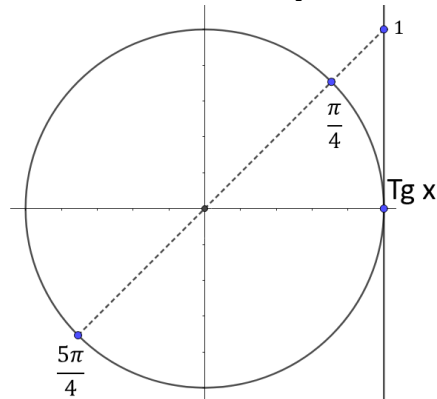
$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ e } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$



$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ e } x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$$



$$\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

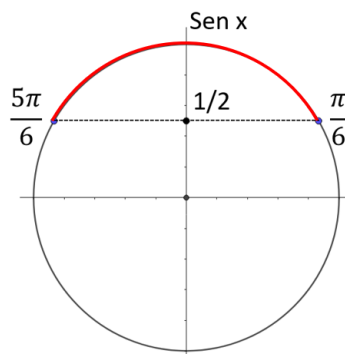


## Inequações Trigonômétricas

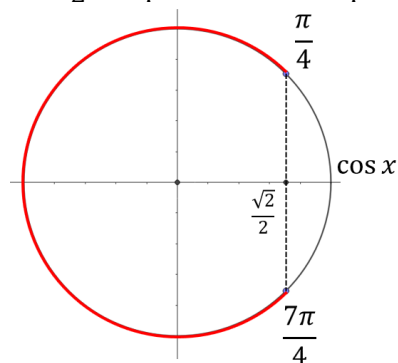
Utilizamos as mesmas regras utilizadas para as equações trigonométricas.

**Exemplo:** Resolva as inequações abaixo para as duas condições citadas nas equações:

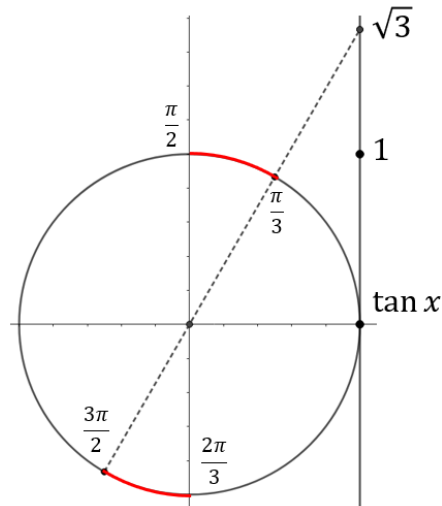
$$\text{sen } x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$



$$\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$$



$$\tan x \geq \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} + \pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \pi k$$



Observações que podem facilitar a resolução de equações e inequações:

- I. Quando as mesmas envolvem seno, devemos fazer sempre a projeção do arco **na horizontal**.
- II. Quando as mesmas envolvem cosseno, devemos fazer sempre a projeção do arco **na vertical**.
- III. Quando as mesmas envolvem tangentes, devemos **prolongar** o arco **passando pelo centro da circunferência**.
- IV. Para encontrar as determinações, basta, utilizar a regra da redução de arcos para o 1º quadrante.

## EXERCÍCIOS

- 1) (PUCRS – 17) A pressão arterial é a pressão que o sangue exerce sobre as paredes das artérias. Ela atinge o valor máximo (pressão sistólica) quando os ventrículos se contraem, e o valor mínimo (pressão diastólica) quando eles estão em repouso. Suponhamos que a variação da pressão arterial (em mmHg) de um cidadão porto alegreense em função do tempo (em segundos) é dada por  $P(t) = 100 - 20 \cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$ . Diante disso, os valores da pressão diastólica e sistólica, em mmHg, são iguais, respectivamente, a
- 60 e 100.
  - 60 e 120.
  - 80 e 120.
  - 80 e 130.
  - 90 e 120.
- 2) (UFSC) Assinale a soma da (s) proposição (ões) CORRETA (S). As marés são fenômenos periódicos que podem ser descritos, simplificadaamente, pela função seno. Suponhamos que, para uma determinada maré, a altura  $h$ , medida em metros, acima do nível médio, seja dada, aproximadamente, pela fórmula  $h(t) = 8 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ , em que  $t$  é o tempo medido em horas.
01. O valor mínimo atingido pela maré baixa é 8 m.
  02. O momento do dia em que ocorre a maré baixa é às 12 h.
  04. O período de variação da altura da maré é de 24 h.
  08. O período do dia em que um navio de 10 m de calado (altura necessária de água para que o navio flutue livremente) pode permanecer nesta região é entre 2 e 10 horas.
- 3) (UFRGS – 16) Considere as funções  $f$  e  $g$  definidas por  $f(x) = \sin(x)$  e  $g(x) = \cos(x)$ . O número de raízes da equação  $f(x) = g(x)$  no intervalo de  $[-2\pi, 2\pi]$  é
- 3.
  - 4.
  - 5.
  - 6.
  - 7.
- 4) (UFRGS – 15) O gráfico da função  $f$ , definida por  $f(x) = \cos x$ , e o gráfico da função  $g$ , quando representados no mesmo sistema de coordenadas, possuem somente dois pontos em comum. Assim, das alternativas abaixo, a que pode representar a função  $g$  é
- $g(x) = (\sin x)^2 + (\cos x)^2$ .
  - $g(x) = x^2$ .
  - $g(x) = 2^x$ .
  - $g(x) = \log x$ .
  - $g(x) = \sin x$ .
- 5) (UPF – 15) A quantidade de soluções que a equação trigonométrica  $\sin^4 x - \cos^4 x = 1/2$  admite no intervalo de  $[0, 3\pi]$  é:
- 0.
  - 2.
  - 4.
  - 6.
  - 8.
- 6) (UFRGS) O número de soluções da equação  $2\cos x = \sin x$  que pertencem ao intervalo  $\left[-\frac{16\pi}{3}, \frac{16\pi}{3}\right]$  é:
- 8.
  - 9.
  - 10.
  - 11.
  - 12.

### GABARITO

1	2	3	4	5	6
C	(12)	B	B	D	C

## CORPO DOS COMPLEXOS

O conjunto dos números complexos, indicado por  $\mathbb{C}$  é o conjunto dos pares ordenados de números reais, em que estão definidas as operações:

$$\text{Adição: } (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

$$\text{Multiplicação: } (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

O par  $(3, 0)$  corresponde ao número real 3.

O par  $(0, 0)$  corresponde ao número real (zero).

Os pares ordenados com o 2º elemento diferente de (zero), por exemplo,  $(0, 2)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(1, 3)$  são os números complexos que não são reais.

### Unidade Imaginária

Criou-se um nome e um símbolo para o número complexo  $(0, 1)$ . Ele será chamado de unidade imaginária e indicado por  $i$ . Logo:

$$i^2 = i \cdot i, \quad \text{ou seja, } (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0), \quad \text{então}$$

$$i^2 = -1$$

### Potências de $i$

Assim observa-se que ocorre repetição de valores a cada quatro expoentes. Desta forma, para determinação de expoentes na forma  $i^n$ , sendo  $n$  um número natural, vamos utilizar a seguinte regra:

$$\begin{cases} i^0 = 1 & i^4 = 1 \\ i^1 = i & i^5 = i \\ i^2 = -1 & i^6 = -1 \\ i^3 = -i & i^7 = -i \end{cases} \Rightarrow i^n = i^r, \quad \text{sendo: } \begin{array}{r} n \quad | \quad 4 \\ \hline \phantom{n} \quad | \quad q \\ \hline \phantom{n} \quad | \quad r \end{array}$$

**Exemplo:** Calcule:  $i^{82}$ .

$$\frac{82}{4} = 20 \cdot 4 + 2 \Rightarrow i^{82} = i^2 = -1$$

**Exemplo:**  $\sqrt{i^{15} + i^{56} + i^{81}}$  equivale a:

$$\frac{15}{4} = 3 \cdot 4 + 3 \Rightarrow i^{15} = i^3 = -i$$

$$\frac{56}{4} = 14 \cdot 4 + 0 \Rightarrow i^{56} = i^0 = 1$$

$$\frac{81}{4} = 20 \cdot 4 + 1 \Rightarrow i^{81} = i^1 = i$$

Logo,

$$\sqrt{i^{15} + i^{56} + i^{81}} = \sqrt{-i + 1 + i} = \sqrt{1} = 1$$

**Exemplo:** (UFRGS) As raízes da equação  $x^2 - 4x + 13 = 0$  são:

a)  $-1$  e  $5$ .

c) Inexistentes.

e) Irracionais.

b)  $2 \pm 3i$ .

d) Múltiplas.

Pela fórmula de Bhaskara, temos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} \Rightarrow x \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{36 \cdot (-1)}}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \pm 6i}{2} \Rightarrow x = 2 \pm 3i \end{aligned}$$

Alternativa B.

## Forma Algébrica de um Número Complexo

Todo o número complexo  $z = (a, b)$  pode ser escrito de forma única:

$$z = a + bi$$

Onde:

- $a$  é a parte real,  $\text{Re}(z)$ , do complexo;
- $bi$  é a parte imaginária,  $\text{Im}(z)$ , do complexo;
- $a$  e  $b$  são os coeficientes das partes reais e imaginárias, respectivamente.

**Exemplos:**  $z = 3 + 4i$ ,  $z_1 = 0 + 3i$ ,  $z_2 = 5 + 0i$ .

Analisando um número complexo através de sua forma algébrica, temos que:

- Número Real: quando  $b = 0$ .
- Número Imaginário Puro: quando  $a = 0$ .
- Número Imaginário, ou número não real: quando  $b \neq 0$ .

**Exemplo:** Para que o número complexo  $z = (x + 2y) + xi$ , com  $y \neq 0$ , seja um número imaginário puro deve-se ter  $x$  igual a?

$$x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$$

**Exemplo:** Para que o complexo  $(x + 2 + 8i)$  seja um número imaginário puro, deve-se ter  $x$  igual a:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

**Exemplo:** Para que o número complexo  $2 + (x - 1)i$  seja um número real, deve-se ter  $x$  igual a:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

## Igualdade de Números Complexos

Dois números complexos  $z = a + bi$  e  $z_1 = c + di$  são iguais se e somente se:  $a = c$  e  $b = d$ .

**Exemplo:** (PUCRS) O complexo  $z = (m - 1) + (m + n)i$  é igual ao complexo  $5 + 2i$ . Calculando-se  $n^2$ , encontra-se:

- a) 25.                      b) 16.                      c) 9.                      d) 4.                      e) 1.

Temos,

$$m - 1 = 5 \quad e \quad m + n = 2 \Rightarrow m = 6 \quad e \quad 6 + n = 2 \Rightarrow m = 6 \quad e \quad n = -4$$

Assim,

$$n^2 = (-4)^2 = 16$$

Alternativa B.

## Conjugado de um Número Complexo

Considere o complexo  $z = a + bi$ , definimos como seu conjugado  $\bar{z} = a - bi$ .

*Observação:* O conjugado de  $z$  é o simétrico de  $z$  em torno do eixo real.

## Oposto de um Número Complexo

Considere o complexo  $z = a + bi$ , definimos como oposto do complexo  $-z = -a - bi$ .

*Observação:* O oposto de  $z$  é o simétrico de  $z$  em relação a origem do Plano de Gauss.

## Norma de um Número Complexo

Considere o complexo  $z = a + bi$ , definimos como norma de complexo:  $N(z) = a^2 + b^2$

## Módulo de um Número Complexo

Considere o complexo  $z = a + bi$ , definimos como módulo do complexo, a raiz quadrada da norma, então:  $\rho = |z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{a^2 + b^2}$

**Exemplo:** Dado o complexo  $z = 3 + 4i$ , determine:

a) conjugado:  $\bar{z} = 3 - 4i$

b) oposto:  $-z = -3 - 4i$

c) norma:  $N(z) = 3^2 + 4^2 \Rightarrow N(z) = 9 + 16 \Rightarrow N(z) = 25$

d) módulo:  $\rho = \sqrt{N(z)} = \sqrt{25} \Rightarrow \rho = 5$

## Operações com Números Complexos

Adição e Subtração: somam-se ou subtraem-se entre si as partes reais e as partes imaginárias:

**Exemplos:**

a)  $(5 + 3i) + (-2 + 6i) = (5 - 2) + (3i + 6i) = 3 + 9i$

b)  $(7 - 8i) - (5 - 2i) = (7 - 5) + (-8i + 2i) = 2 - 6i$

Multiplicação: aplica-se a distributiva, como se fossem binômios.

**Exemplo:**

$$\begin{aligned}(2 + 3i) \cdot (5 - 3i) &= 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3i + 3i \cdot 5 - 3i \cdot 3i = 10 - 6i + 15i - 9i^2 = \\ &= 10 + 9i - 9 \cdot (-1) = 10 + 8i + 9 = 19 + 8i\end{aligned}$$

Divisão: quando o denominador apresentar "i", multiplica-se e divide-se pelo conjugado do denominador.

**Exemplo:**

$$\begin{aligned}\frac{3 + 4i}{2 - 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} &= \frac{(3 + 4i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{6 + 9i + 8i + 12i^2}{4 - 9i^2} = \\ &= \frac{6 + 17i + 12(-1)}{4 - 9(-1)} = \frac{6 + 17i - 12}{4 + 9} = \frac{-6 + 17i}{13} = -\frac{6}{13} + \frac{17}{13}i\end{aligned}$$

**Exemplo:** (UCS) Multiplicando-se a parte real pelo coeficiente da parte imaginária do complexo  $\frac{5-i}{2i}$  resulta o produto:

- a) 1,65.                      b) 1,55.                      c) 1,45.                      d) 1,35.                      e) 1,25.

Primeiro reduzimos esse complexo:

$$\frac{5-i}{2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{5i-i^2}{2i^2} = \frac{5i-(-1)}{2(-1)} = \frac{5i+1}{-2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

Multiplicando-se  $(-1/2)$  por  $(-5/2)$ , temos

$$-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4} = 1,25$$

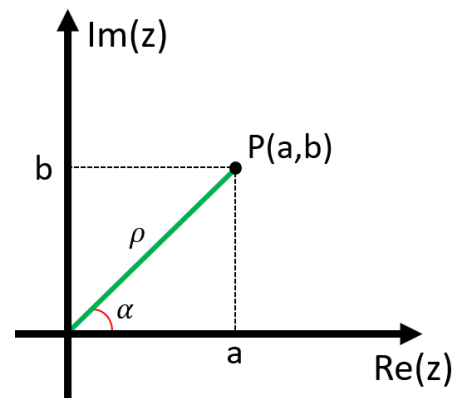
Alternativa E.

## Representação Geométrica e Forma Trigonométrica ou Polar de um Número Complexo

Considere o complexo  $z = a + bi$ , então:

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cdot \text{cos } \alpha$$



Para escrever um complexo definido em sua forma algébrica  $z = a + bi$ , na forma trigonométrica ou polar, devemos escrever os coeficientes, das partes reais e imaginárias, em função do seu argumento.

**Exemplo:** Escreva o número complexo  $z = 1 + i$ , na sua forma trigonométrica ou polar.

$$a = 1 \text{ e } b = 1 \Rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+1} \Rightarrow \rho = \sqrt{2}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ \text{ ou } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Logo,  $z$  pode ser escrito como

$$z = a + bi = (\rho \text{cos } \alpha) + (\rho \text{sen } \alpha)i \Rightarrow z = (\sqrt{2} \text{cos } 45^\circ) + (\sqrt{2} \text{sen } 45^\circ)i$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2} \left( \text{cos } \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4} \right)$$

**Exemplo:** Escreva o número complexo  $z = \frac{1+i}{i}$  na forma trigonométrica.

Primeiro reduzimos esse complexo:

$$z = \frac{1+i}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i+i^2}{i^2} = \frac{i-1}{-1} = 1-i \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = -1 \Rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+1} \Rightarrow \rho = \sqrt{2}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \arcsen -\frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha \Rightarrow \alpha = -45^\circ \text{ ou } \alpha = -\frac{\pi}{4}$$

Logo,  $z$  pode ser escrito como

$$z = a + bi = (\rho \text{cos } \alpha) + (\rho \text{sen } \alpha)i \Rightarrow z = (\sqrt{2} \text{cos } -45^\circ) + (\sqrt{2} \text{sen } -45^\circ)i$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2} \left( \text{cos } -\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen } -\frac{\pi}{4} \right)$$

**Exemplo:** Escreva o número complexo  $z = 4 (\cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3)$  na forma algébrica.

$$\rho = 4 \quad e \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$a = \rho \cos \alpha \Rightarrow a = 4 \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow a = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a = -2$$

$$b = \rho \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow b = 4 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \Rightarrow b = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

Logo,  $z$  pode ser escrito como

$$z = a + bi \Rightarrow z = -2 + 2\sqrt{3}i$$

**Exemplo:** Escreva o complexo  $z = -1 + i$ , na forma trigonométrica ou polar.

$$a = -1 \quad e \quad b = 1 \Rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} \Rightarrow \rho = \sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha \Rightarrow \alpha = 135^\circ \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

Logo,  $z$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} z = a + bi &= (\rho \cos \alpha) + (\rho \operatorname{sen} \alpha)i \Rightarrow z = (\sqrt{2} \cos 135^\circ) + (\sqrt{2} \operatorname{sen} 135^\circ)i \\ &\Rightarrow z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

**Exemplo:** Escreva o complexo  $z = -1 - i$ , na forma trigonométrica ou polar.

$$a = -1 \quad e \quad b = -1 \Rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} \Rightarrow \rho = \sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \arccos -\frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha \Rightarrow \alpha = -135^\circ \quad \text{ou} \quad \alpha = -\frac{3\pi}{4}$$

Logo,  $z$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} z = a + bi &= (\rho \cos \alpha) + (\rho \operatorname{sen} \alpha)i \Rightarrow z \\ &= (\sqrt{2} \cos -135^\circ) + (\sqrt{2} \operatorname{sen} -135^\circ)i \\ &\Rightarrow z = \sqrt{2} \left( \cos -\frac{3\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} -\frac{3\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

## Operações com Números Complexos na forma Trigonométrica ou Polar

Para definir as operações vamos considerar os complexos  $z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_1)$  e  $z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_2)$ .

Multiplicação: multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos. Então:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

Divisão: dividem-se os módulos e subtraem-se os argumentos. Então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2))$$

Potenciação: eleva-se o módulo ao expoente desejado e multiplica-se o argumento pelo expoente. Então:

$$z_1^n = |z_1|^n(\cos(n \cdot \theta_1) + i \cdot \operatorname{sen}(n \cdot \theta_1))$$

**Exemplo:** Dados  $z = 4(\cos 135^\circ + i \cdot \sin 135^\circ)$  e  $w = 2(\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)$ , determinar a forma algébrica de:

a)  $z \cdot w =$

$$\begin{aligned}z \cdot w &= |z||w|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ \Rightarrow z \cdot w &= 4 \cdot 2 \cdot (\cos(135^\circ + 45^\circ) + i \cdot \sin(135^\circ + 45^\circ)) \\ &\Rightarrow z \cdot w = 8 \cdot (\cos 180^\circ + i \cdot \sin 180^\circ) \\ \Rightarrow z \cdot w &= 8 \cdot (-1 + i \cdot 0) \Rightarrow z \cdot w = 8 \cdot (-1) \Rightarrow z \cdot w = -8\end{aligned}$$

b)  $z / w =$

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{|z|}{|w|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)) \\ \Rightarrow \frac{z}{w} &= \frac{4}{2}(\cos(135^\circ - 45^\circ) + i \cdot \sin(135^\circ - 45^\circ)) \\ \Rightarrow \frac{z}{w} &= 2 \cdot (\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ) \Rightarrow \frac{z}{w} = 2 \cdot (0 + i \cdot 1) \\ &\Rightarrow \frac{z}{w} = 2 \cdot i \Rightarrow \frac{z}{w} = i\end{aligned}$$

c)  $z^3 =$

$$\begin{aligned}z^n &= |z|^n(\cos(n \cdot \theta_1) + i \cdot \sin(n \cdot \theta_1)) \\ \Rightarrow z^3 &= 4^3(\cos(3 \cdot 135^\circ) + i \cdot \sin(3 \cdot 135^\circ)) \\ \Rightarrow z^3 &= 64 \cdot (\cos 405^\circ + i \cdot \sin 405^\circ) \Rightarrow z^3 = 64 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \Rightarrow z^3 &= 32\sqrt{2} + 32\sqrt{2}i \Rightarrow z^3 = 32\sqrt{2}(1 + i)\end{aligned}$$

## Radiciação de Complexos

Qualquer número complexo  $z$ , não nulo, admite  $n$  raízes distintas. Todas têm módulo igual a  $\sqrt[n]{|z|}$  e seus argumentos formam uma (PA) de primeiro termo  $\theta/n$  e razão  $2\pi/n$ . Todo o número complexo  $w$ , tal que  $w^n = z$  é chamado e raiz enésima de  $z$ . Estas raízes podem ser obtidas através da fórmula:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

Onde  $k = 0, 1, 2, 3, \dots (n - 1)$  e  $n$  natural,  $n > 1$ .

**Observações que podem facilitar a determinação dessas raízes:**

- I. Todas estas raízes possuem mesmo módulo;
- II. As raízes são os vértices de um polígono regular de  $n$  lados;
- III. As raízes complexas são sempre conjugadas, duas a duas;
- IV. Este polígono regular de  $n$  lados é inscrito em uma circunferência de raio igual ao módulo, e centrada na origem.

## Equações e Inequações Envolvendo Módulo

Normalmente são questões de resolução geométrica, neste caso, simplesmente resolvemos através da representação geométrica no plano de Gauss.

## EXERCÍCIOS

- 1) (UPF – 16) O número complexo  $z$ , tal que  $5z + \bar{z} = 12 + 16i$ , é igual a:
- $-2+2i$ .
  - $2-3i$ .
  - $3+i$ .
  - $2+4i$ .
  - $1+2i$ .
- 2) (PUCRS – 15) Uma das soluções apresentadas por um software para  $\sqrt[n]{1}$  em  $\mathbb{C}$  é  $i$ . O menor valor possível para  $n$  é
- 2.
  - 3.
  - 4.
  - 5.
  - 6.
- 3) (PUCRS – 15) Foi construído, no plano de Argand Gauss, um polígono cujos vértices estão sobre as raízes do polinômio  $p(z) = z^4 - 16$  em  $\mathbb{C}$ . A área desse polígono, em unidades de área, é
- 64.
  - 32.
  - 16.
  - 8.
  - 4.
- 4) (ULBRA – 15) Considerando o plano de Argand-Gauss, o afixo do número complexo  $z = (1 + i)^6$  é um ponto:
- Do terceiro quadrante.
  - Do segundo quadrante.
  - Do primeiro quadrante.
  - Do eixo real.
  - Do eixo imaginário.
- 5) (UFSM) O valor de  $a$  para que o quociente dos complexos  $\frac{2a+3i}{2-i}$  seja um número real é:
- $-3/2$ .
  - $-2$ .
  - $-3/4$ .
  - $-3$ .
  - 2.
- 6) (UFRGS) Considere  $z_1 = -3 + 2i$  e  $z_2 = 4 + i$ . A representação trigonométrica de  $z_1 + \bar{z}_2$  é
- $\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$ .
  - $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$ .
  - $\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right)$ .
  - $\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$ .
  - $\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$ .

## GABARITO

1	2	3	4	5	6
D	C	D	E	D	B

# POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

## Polinômios em uma Variável

Polinômio de grau  $n$  é uma função definida para  $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , onde todos os expoentes devem ser números naturais, ou seja,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo:**  $P(x) = -10x^5 + 2x^3 + 6x^2 - 7ix + 10$ .

*Observação:*

As expressões  $x^{-2} + 2x + 4$  e  $x^{100} + 3x^{2/3}$  não representam um polinômio, pois em cada uma delas há pelo menos um expoente que não é um número natural.

## Conceitos Importantes:

Grau de um polinômio: é o expoente máximo de  $x$  no polinômio, dentre os termos de coeficientes não nulos. Representa-se por  $\text{gr}(P)$ .

Coefficientes de um Polinômio: são números  $\in \mathbb{C}$  que acompanham a variável.

Termo Independente de um Polinômio: é um número  $\in \mathbb{C}$ , que acompanha a variável  $x$  elevada ao expoente 0 (zero).

*Observação:*

Polinômio constante é todo aquele formado apenas pelo termo independente.

Valor Numérico de um Polinômio: é o valor que se obtém substituindo – se todos os  $x$  do polinômio por um número qualquer  $k \in \mathbb{C}$ .

Raiz ou Zero de um Polinômio: é o valor de  $x$  que anula o polinômio, ou seja,  $P(x) = 0$ . É o ponto onde a função polinomial intercepta o eixo das abscissas. O número de raízes de um polinômio é dado pelo seu grau.

*Observação:*

- As raízes de um polinômio podem ser reais ou imaginárias.
- Então,  $a$  é raiz de um polinômio se, e somente se  $P(a) = 0$ .

Polinômios Idênticos: dois polinômios são ditos idênticos quando:

- I. Possuem mesmo grau.
- II. Possui coeficientes respectivos a mesma parte literal iguais.

Polinômios Identicamente Nulos: possuem todos os coeficientes iguais a zero. Não possuem grau. São indicados por  $P(x) = 0$ .

## Divisão de Polinômios

### I. Método da Chave

Dada uma função polinomial  $P(x)$ , chamada dividendo e a função polinomial não identicamente nula  $D(x)$ , dividir  $P(x)$  por  $D(x)$  é obter uma função polinomial  $Q(x)$ , chamada quociente, e a função polinomial  $R(x)$ , chamada resto tal que:  $P(x) = Q(x).D(x) + R(x)$ , em que:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & D(x) \\ \vdots & Q(x) \\ \hline R(x) & \end{array} \quad \begin{array}{l} P(x) = D(x).Q(x) + R(x) \\ \text{gr}_{\text{máx.}}[R(x)] = \text{gr}[D(x)] - 1 \end{array}$$

### II. Dispositivo Prático de Briot – Ruffini

Vamos usar este dispositivo somente para a divisão de um polinômios  $P(x)$  por um divisor que apresentar grau igual a 1.

**Exemplo:** Dividir  $2x^4 - 6x^3 + 4x - 7$  por  $2x + 2$ , utilizando o método da chave.  
Pelo método da chave

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 6x^3 + 4x - 7 \quad | \quad 2x + 2 \\ \underline{-2x^4 - 2x^3} \phantom{+ 4x - 7} \quad x^3 - 4x^2 + 4x - 2 \\ \phantom{2x^4 -} -8x^3 + 4x - 7 \\ \phantom{2x^4 -} \underline{+8x^3 + 8x^2} \\ \phantom{2x^4 -} \phantom{+ 8x^2} 8x^2 + 4x - 7 \\ \phantom{2x^4 -} \phantom{+ 8x^2} \underline{-8x^2 - 8x} \\ \phantom{2x^4 -} \phantom{+ 8x^2} \phantom{+ 8x} -4x - 7 \\ \phantom{2x^4 -} \phantom{+ 8x^2} \phantom{+ 8x} \underline{4x + 4} \\ \phantom{2x^4 -} \phantom{+ 8x^2} \phantom{+ 8x} \phantom{+ 4} -3 \end{array}$$

### III. Teorema do Resto

Sejam  $a$  e  $b$  constantes quaisquer. O resto da divisão de um polinômio  $P(x)$  por  $ax - b$  é igual ao valor numérico da raiz do divisor no polinômio, ou seja,

$$R(x) = P(\text{raiz do divisor}(ax - b)).$$

### IV. Teorema de D'Alembert

Sejam  $a$  e  $b$  constantes quaisquer. Um polinômio  $P(x)$  é divisível por  $ax - b$  se, e somente se,  $P(\text{raiz do divisor}(ax - b)) = 0$ .

### V. Divisão de um Polinômio pelo produto $(x - a)(x - b)$

Sejam  $a$  e  $b$  constantes quaisquer, com  $a \neq b$ . Um polinômio  $P(x)$  é divisível por  $(x - a)$  e  $(x - b)$  se, e somente se,  $P(x)$  é divisível pelo produto  $(x - a)(x - b)$ .

**Exemplo:** Para que valores de  $m$  e  $n$ , respectivamente, o polinômio  $P(x) = x^5 - mx^4 + nx^3 - 2x^2 + 10x - 12$  é divisível por  $(x - 2)(x - 3)$ :

- a) 5 e 6.                      b) 6 e 5.                      c) 2 e 3.                      d) 3 e 2.                      e) 4 e 5.

Como  $P(x)$  é divisível por  $(x - 2)(x - 3)$ , então 2 e 3 são raízes de  $P(x)$ :

$$2^5 - m \cdot 2^4 + n \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 12 = 0 \Rightarrow 32 - 16m + 8n - 8 + 20 - 12 = 0$$
$$\Rightarrow 8n - 16m = -32 \Rightarrow n - 2m = -4$$

$$3^5 - m \cdot 3^4 + n \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 - 12 = 0 \Rightarrow 243 - 81m + 27n - 18 + 30 - 12 = 0$$
$$\Rightarrow 27n - 81m = -243 \Rightarrow n - 3m = -9$$

Com isso, temos o sistema

$$\begin{cases} n - 2m = -4 \\ n - 3m = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 2m - 4 \\ 2m - 4 - 3m = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 2m - 4 \\ -m = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \cdot 5 - 4 \\ m = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 6 \\ m = 5 \end{cases}$$

Alternativa A.

## Equações Algébricas

Obtemos uma equação algébrica quando queremos resolver  $P(x) = 0$ . Um polinômio  $P(x)$  de grau  $n$  apresenta exatamente  $n$  raízes complexas (reais e/ou não reais), quando  $P(x) = 0$ . Resolver uma equação polinomial significa achar suas raízes.

**Exemplo:** Seja  $P(x) = 4x - 8$ , quando  $P(x) = 0$ , temos uma equação de grau 1, que apresenta exatamente 1 raiz.

**Exemplo:** Seja  $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ , quando  $Q(x) = 0$ , temos uma equação de grau 2, que apresenta exatamente 2 raízes.

## Teorema da Decomposição

Todo o polinômio de grau  $n$ , com  $n \geq 1$  pode ser escrito na forma de produtos de fatores do 1º grau:

$$P(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n), \text{ onde } x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \text{ são todas as raízes de } P(x).$$

**Exemplo:** Escreva a equação  $x^2 - x - 6 = 0$  na sua forma fatorada.

$$(x - 3)(x + 2)$$

## Multiplicidade de uma raiz

É a quantidade de vezes que a raiz anula a equação polinomial. As raízes de uma equação polinomial podem ser todas distintas ou não.

**Exemplo:** Determine o grau, e as raízes da equação  $(x - 1) \cdot (x - 2)^2 \cdot (x - 3)^3 = 0$ .

Grau:  $1 + 2 + 3 = 6$

Raízes:  $x = 1, x = 2$  e  $x = 3$

## Raízes Imaginárias

Se o número complexo  $z = a + bi$  é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então o conjugado  $\bar{z} = a - bi$  também é raiz dessa equação. Portanto, o número de raízes não reais de uma equação polinomial de coeficientes reais é necessariamente par.

*Atenção!*

Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então essa equação admite pelo menos uma raiz real.

**Exemplo:** Qual é o menor grau possível de uma equação polinomial  $P(x) = 0$  de coeficientes reais que possui como raízes simples os números 8 e  $2 + i$ , e como raiz dupla  $-3i$ .

No mínimo grau 4, pois temos  $(x - 8)(x - (2 + i))(x + 3i)^2$ .

### Teorema das Raízes Racionais

Seja  $p/q$  com  $p$  e  $q$  inteiros e primos entre si e  $q \neq 0$ . Se  $p/q$  é raiz de uma equação polinomial, com coeficientes inteiros, então  $p$  é divisor do termo independente e  $q$  é divisor do coeficiente que acompanha  $x$  de maior grau.

**Exemplo:** Determinar todas as raízes racionais de  $3x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$ .

Fatorando o polinômio, temos

$$(x - 2)(\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x - 1) = 0$$

As raízes são:

$$x = 2, \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

### Número de Raízes Nulas

O número de raízes nulas de uma equação algébrica de termo independente nulo é igual ao menor expoente de  $x$ .

**Exemplo:** Determine a quantidade de raízes nulas da equação  $x^6 + 2x^3 - 5x^2 = 0$ .

Colocando  $x$  em evidência, temos  $x^2(x^4 + 2x - 5) = 0$ .

Logo, temos 2 raízes nulas, pois  $x^2 = 0 \Rightarrow x \cdot x = 0$ .

### Relações de Girard

Relacionam os coeficientes da equação e suas raízes.

Equações de grau 2:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Equações de grau 3:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ P_1 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

**Exemplo:** Sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  as raízes da equação  $2x^3 + 6x^2 - 7x - 12 = 0$ , determine  $1/a + 1/b + 1/c$ . Pela Relação de Girard,

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ ab + ac + bc = -\frac{7}{2} \\ abc = 6 \end{cases} \quad e \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} = -\frac{7}{6} = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{7}{12}$$

**Exemplo:** Se o produto de duas raízes da equação  $x^3 + kx^2 + 2x - 6 = 0$  é 3, o valor de  $k$  é:

- a)  $-3/2$ .                      b)  $-3$ .                      c)  $3$ .                      d)  $3/2$ .                      e)  $2$ .

Pela Relação de Girard,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -k \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 6 \end{cases}$$

Tomando  $x_1 \cdot x_2 = 3$ , temos

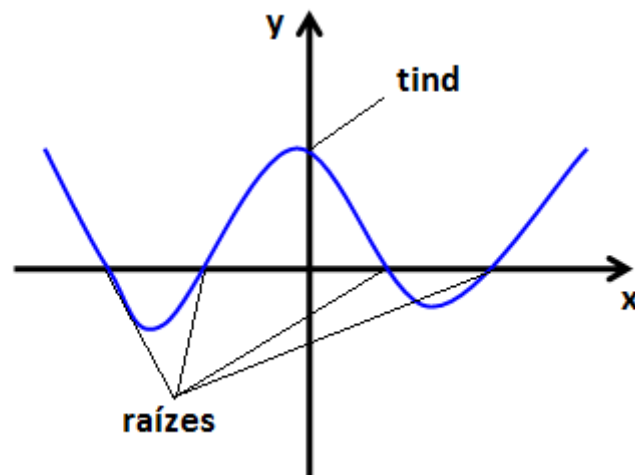
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -k \\ 3 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = 2 \\ 3 \cdot x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -k - 2 \\ x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -k - 2 \\ x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -k - 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow -k = \frac{3}{2} \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

Alternativa A.

## Gráficos de Polinômios

Vários elementos podem ser identificados nos gráficos das funções polinomiais.

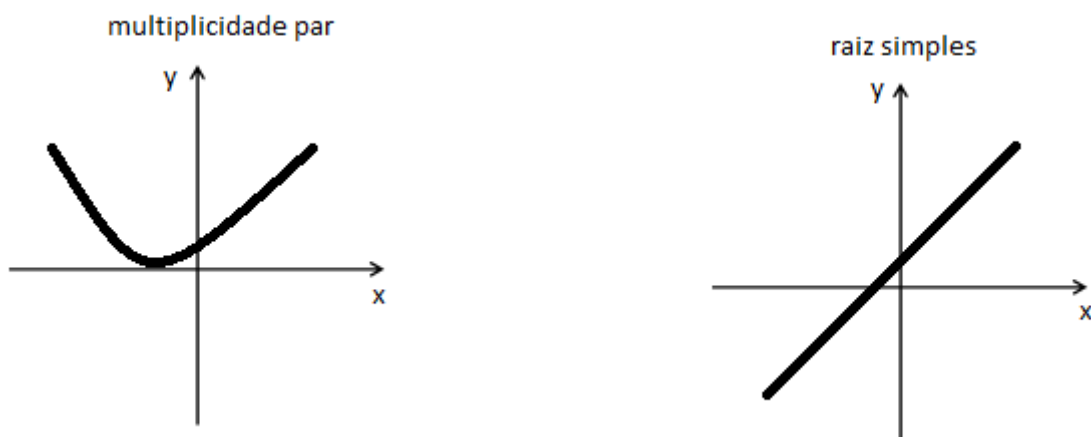


Termo Independente: é o ponto onde a função intercepta o eixo das ordenadas (y).  $(0, \text{tind})$

Raízes: os valores de  $x$  onde a função intercepta o eixo das abscissas.  $(\text{raiz}, 0)$

## Multiplicidade das Raízes Reais

Podemos identificar o estilo de traçado, das raízes com multiplicidade par ou ímpar.

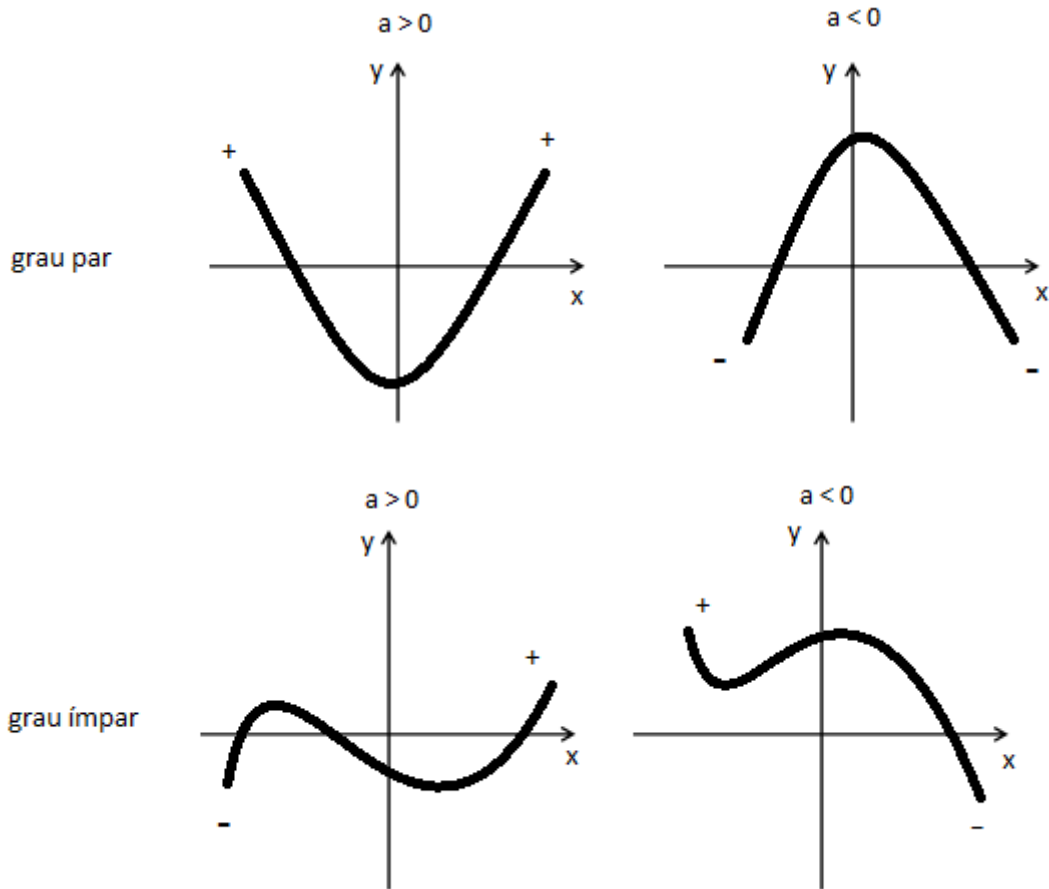


Desta forma observamos que, as raízes de multiplicidade par são sempre tangentes ao eixo dos  $x$ , e as Raízes de multiplicidade ímpar cruzam o eixo dos  $x$ .

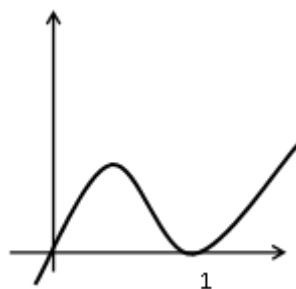
## Grau das funções polinomiais

Grau do polinômio é par: a função começa e termina com o mesmo sinal.

Grau do polinômio é ímpar: a função começa com um sinal e termina com sinal contrário.



**Exemplo:** (UFRGS) O conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = p(x)\}$  está representado pela curva da figura.



A expressão que pode representar o polinômio  $p(x)$  é:

- a)  $x(x-1)^4$ .                      c)  $x(x-1)$ .                      e)  $x^3(x-1)$ .  
b)  $x(x-1)^3$ .                      d)  $x^2(x-1)$ .

Pelo Teorema da Decomposição, temos duas raízes na figura  $x = 0$  e  $x = 1$ ,

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow P(x) = a(x - 0)(x - 1)$$

Todas as alternativas mostram que  $a = 1$ , logo

$$P(x) = x(x - 1)$$

Alternativa C.

## EXERCÍCIOS

- 1) (PUCRS – 15) Se  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , onde  $a, b, c, d$  são números reais, e sabendo que  $p(x)$  é divisível por  $x + 1$ , podemos afirmar que:
- $a + c > b + d$
  - $a + c = b + d$
  - $a + c < b + d$
  - $a + b + c + d = 0$
  - $a + b + c + d = 1$
- 2) (UPF – 15) Se o polinômio  $P(x) = x^4 - 2x^2 + mx + p$  é divisível por  $D(x) = x^2 + 1$ , o valor de  $m - p$  é:
- 3.
  - 1.
  - 0.
  - 2.
  - 3.
- 3) (UCS) Dado o polinômio  $P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 2x - 8$ , o valor de  $P(3) + P(2)$  é:
- 59.
  - 56.
  - 49.
  - 46.
  - 39.
- 4) (PUCRS) A igualdade 
$$\frac{2x - 4}{x^2 - 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1}$$
 é verdadeira para  $A$  e  $B$ , respectivamente iguais a,
- 1 e - 1.
  - 1 e 1.
  - 3 e - 1.
  - 3 e - 1.
  - 3 e 1.
- 5) (UFRGS) Se  $P(x)$  e  $Q(x)$  são polinômios de graus respectivamente iguais a  $n$  e a  $m$ , então o grau de  $2(x - 1)^3 \cdot P(x) \cdot Q(x)$  é:
- $12nm$ .
  - $12nm^4$ .
  - $3nm^4$ .
  - $3 + n + m$ .
  - $3 + n + m^4$ .
- 6) (UFRGS – 17) Considere o polinômio  $p$  definido por  $p(x) = x^2 + 2(n + 2)x + 9n$ . Se as raízes de  $p(x) = 0$  são iguais, os valores de  $n$  são
- 1 e 4.
  - 2 e 3.
  - 1 e 4.
  - 2 e 4.
  - 1 e - 4.
- 7) (PUCRS – 17) Os polinômios  $p(x), q(x), f(x), h(x)$  em  $\mathbb{C}$ , nessa ordem, estão com seus graus em progressão geométrica. Os graus de  $p(x)$  e  $h(x)$  são, respectivamente, 16 e 2. A soma do número de raízes de  $q(x)$  com o número de raízes de  $f(x)$  é
- 24.
  - 16.
  - 12.
  - 8.
  - 4.
- 8) (UFRGS – 15) Considere o polinômio  $p(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ . Se  $p(2) = 0$  e  $p(-2) = 0$ , então as raízes do polinômio  $p(x)$  são
- 2, 0, 1 e 2.
  - 2, -1, 2 e 3.
  - 2, -1, 1 e 2.
  - 2, -1, 0 e 2.
  - 3, -2, 1 e 2.
- 9) (UFRGS – 11) Um polinômio de  $5^\circ$  com coeficientes reais que admite os números complexos  $-2 + i$  e  $1 - 2i$  como raízes, admite
- no máximo mais uma raiz complexa.
  - $2 - i$  e  $-1 + 2i$  como raízes.
  - uma raiz real.
  - duas raízes reais distintas.
  - três raízes reais distintas.
- 10) (UFRGS) Se  $a$  e  $b$  são as raízes da equação  $2x^2 - 2mx + m^2 = 0$  com  $m \neq 0$  então  $1/a + 1/b$  vale:
- $m^2$ .
  - $m$ .
  - $1/m$ .
  - $2/m$ .
  - $m - 2$ .

11) (UFRGS) A equação  $x^4 - 6x^3 + 22x + 15 = 0$  possui

- a) todas as raízes irracionais.
- b) todas as raízes imaginárias.
- c) todas as raízes naturais.
- d) duas raízes irracionais e duas raízes racionais.
- e) todas as raízes inteiras.

12) (UFSC – 18) Guardadas as condições de existência, determine o valor numérico da expressão para  $x = 343$ .

$$\frac{(51x^4y + 51xy^4) \cdot (mx - 2m + nx - 2n) \cdot (x^2 - 4)}{(x^3 - 4x^2 + 4x) \cdot (17my + 17ny) \cdot (x^2 - xy + y^2) \cdot (69x + 69y)}$$

GABARITO

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	C	C	D	A	C	E	C	D	E	(15)