

# GEOMETRIA ANALÍTICA

## 1. Ponto:

$$d_{AB} = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

$$M_{AB} = (x_M, y_M) = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

## 2. Condição de alinhamento e área de um triângulo:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} = 0 \quad D = \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} \neq 0$$

Alinhados

formam um triângulo

$$A = \frac{1}{2} |D|$$

3. I. Bissetriz dos quadrantes ímpares, equação  $y = x$  divide os quadrantes ímpares ao meio, com isso formando um ângulo de  $45^\circ$ . Pontos sobre essa bissetriz  $(a, a)$  ou  $(-a, -a)$ .
- II. Bissetriz dos quadrantes pares, equação  $y = -x$  divide os quadrantes pares ao meio, com isso formando um ângulo de  $135^\circ$ . Pontos sobre essa bissetriz  $(-a, a)$  ou  $(a, -a)$ .
- III. Pontos equidistantes (possuem a mesma distância) a um determinado ponto.

# GEOMETRIA ANALÍTICA

## 1. Retas:

Coeficiente angular:

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Equação geral:  $ax + by + c = 0$

Equação reduzida:

$$y = mx + h \Rightarrow \begin{cases} m \text{ é o coeficiente angular} \\ h \text{ é o coeficiente linear} \end{cases}$$

DICA: PARA SAIR DA EQUAÇÃO GERAL E OBTER A REDUZIDA BASTA ISOLAR O  $y$ .

Posições Relativas entre duas retas:

**I. Paralelas (s//t):** são retas que não se interceptam e forma o mesmo ângulo, no sentido anti – horário, com o eixo das abscissas. Então:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 \rightarrow m_1 = m_2$$

Paralelas e Coincidentes:  $h_1 = h_2$

Paralelas e Distintas:  $h_1 \neq h_2$

**Retas Concorrentes:** são retas que se interceptam em um único ponto e formam ângulos diferentes, no sentido anti – horário, com o eixo das abscissas. Então:


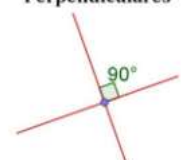
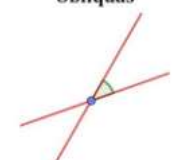
$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \rightarrow \operatorname{tg}\alpha_1 \neq \operatorname{tg}\alpha_2 \rightarrow m_1 \neq m_2$$

**Retas Perpendiculares ( $s \perp t$ ):** são retas que se interceptam em um único ponto, caso particular das retas concorrentes, e formam entre si um ângulo de  $90^\circ$ . Então:

Se (s) e (t) são retas perpendiculares, então temos que:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 + 90^\circ \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 - 90^\circ \dots \\ m_1 &= -\frac{1}{m_2} \rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \end{aligned}$$

Posições relativas de duas retas no plano

Paralelas	Concorrentes	
	<b>Perpendiculares</b> 	<b>Obliquas</b> 
Não se interceptam (não têm pontos em comum).	Intersectam-se (têm um ponto em comum) e formam um ângulo reto.	Intersectam-se (têm um ponto em comum) mas não formam um ângulo reto.

# GEOMETRIA ANALÍTICA

## 1. Intersecção de duas Retas:

Determina – se através de um **Sistema de Equações do 1º grau com duas variáveis**, formado pelas equações das respectivas retas.

A solução é dada sempre através de um par ordenado  $(x, y)$ .

## 3. Intersecções da Reta com os Eixos

**Coordenados:**

Eixo x:  $(x, 0)$

Eixo y:  $(0, y)$

**Dica:**

Fazendo – se  $y = 0$ , tem – se o valor de  $x$  onde a reta corta o eixo das abscissas.

Fazendo – se  $x = 0$ , tem – se o valor de  $y$  onde a reta corta o eixo das ordenadas.

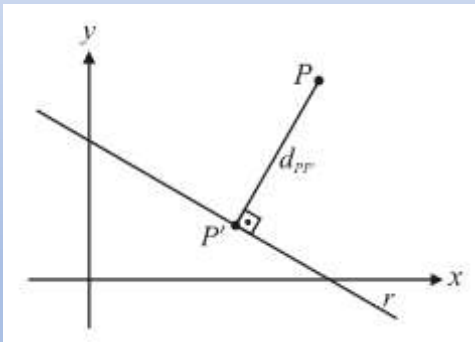
## 2. Distância entre ponto e reta:

Seja  $r$  uma reta de equação  $ax + by + c = 0$  e  $P(x_0, y_0)$  um ponto qualquer do plano cartesiano.

A distância  $d$  do ponto  $P$  à reta  $r$  é igual a distancia entre os pontos  $P$  e  $Q$ ,  $Q \in r$ , com  $PQ$  perpendicular a  $r$  e a menor distância entre o ponto e a reta.

Demonstra – se que:

$$d = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



# GEOMETRIA ANALÍTICA

## 1. Equação Reduzida:

Sejam  $(a, b)$  as coordenadas do centro e  $R$  o raio da circunferência, demonstramos que:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

**Observação:** Se o centro da circunferência for a origem do sistema cartesiano, e portanto  $C(0, 0)$ , então a equação reduzida será  $x^2 + y^2 = R^2$ .

## Equação Geral:

A equação Geral provém da equação reduzida, calculando – se os produtos notáveis.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ , desenvolvendo – se os produtos notáveis têm – se que:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0.$$

## 2. Obtenção do Centro e do Raio de uma Circunferência a partir de sua Equação Geral:

### I. POR COMPARAÇÃO:

**Exemplo:** Obter o Centro e o raio da circunferência de equação  $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$

### II. POR FÓRMULA:

Consideremos a equação  $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$

$$a = \frac{-C}{2A} \text{ e } b = \frac{-D}{2A} \text{ e } R = \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{F}{A}}$$

### Observação:

Para que a equação  $Ax^2 + By^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$ , seja uma circunferência, tem – se as seguintes condições:

$$\begin{cases} A = B \neq 0 \\ a^2 + b^2 - R^2 > 0 \end{cases}$$

## 3. Posições Relativas entre Ponto e Circunferência:

Ponto interior à circunferência	$(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$
Ponto pertence a circunferência	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$
Ponto exterior à circunferência	$(x - a)^2 + (y - b)^2 > R^2$

# GEOMETRIA ANALÍTICA

1. Dizer que  $ax + by + c = 0$  é a equação da reta  $r$  significa que todos os pontos de  $r$ , e **somente eles**, verificam a equação. Assim sendo:

$$P(x_0, y_0) \in r \Leftrightarrow a.x_0 + b.y_0 + c = 0$$

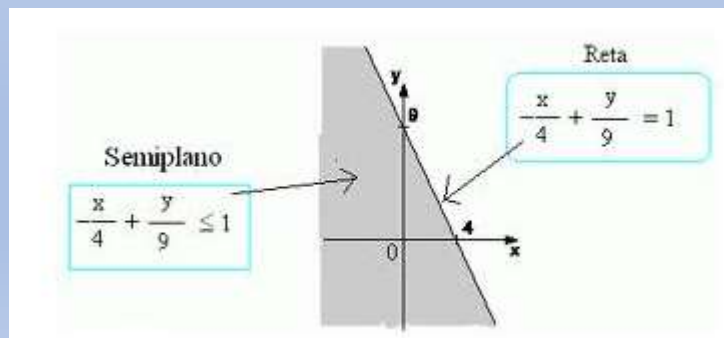
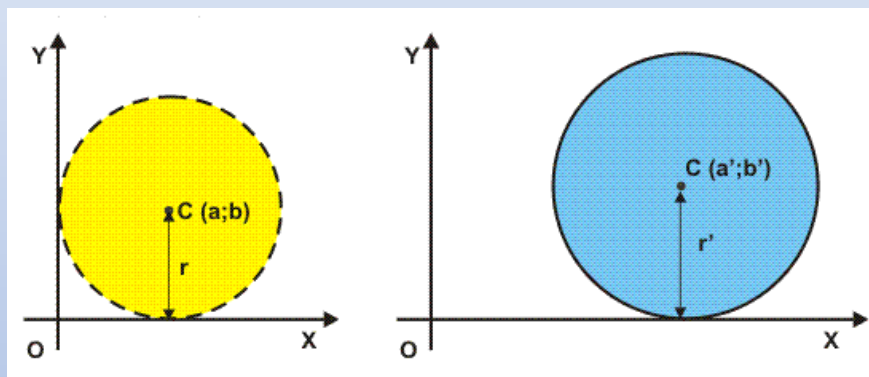
$$P(x_0, y_0) \notin r \Leftrightarrow a.x_0 + b.y_0 + c > 0 \text{ ou } a.x_0 + b.y_0 + c < 0$$

**Observação:** As inequações no plano também envolvem o conceito de circunferência, ou seja, determinar os pontos que são internos ou externos à ela, procedemos da mesma forma. Em muitos casos iremos resolver sistemas de inequações envolvendo retas e circunferências.

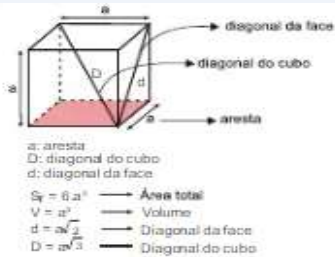
Alguns exemplos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$$

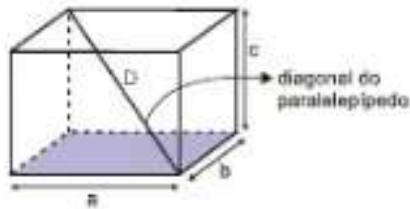
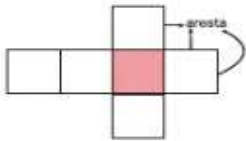
$$(x - a')^2 + (y - b')^2 \leq R^2$$



# 1. Prismas:

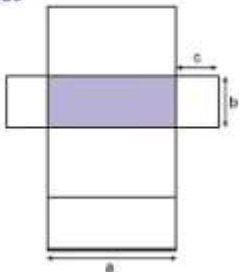


## Planificação



$S_p = 2(ab + ac + bc)$  → Área total  
 $V = a \cdot b \cdot c$  → Volume  
 $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  → Diagonal

## Planificação

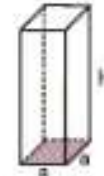


# GEOMETRIA ESPACIAL

## 1.1. Principais Prismas:

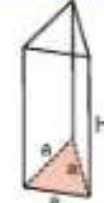
### Quadrangular base = quadrado

$A_b = a^2$   
 $A_l = 4aH$   
 $A_t = 2A_b + A_l$  ou  $A_t = 2a^2 + 4aH$   
 $V = A_b \cdot H$  ou  $V = a^2 H$



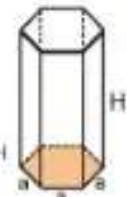
### Triangular base = triângulo equilátero

$A_b = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$   
 $A_l = 3aH$   
 $A_t = 2A_b + A_l$  ou  $A_t = 2 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 3aH$   
 $V_t = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} H$



### Hexagonal base = hexágono

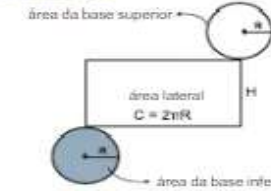
$A_b = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$   
 $A_l = 6aH$   
 $A_t = 2A_b + A_l$  ou  $A_t = 2 \cdot 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 6aH$   
 $V_t = 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} H$



# 2. Sólidos de Revolução:

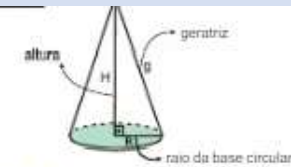


## Planificação

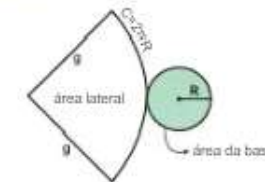


$A_b = \pi R^2$  → Área da base  
 $A_l = 2\pi RH$  → Área lateral  
 $A_t = 2A_b + A_l$  ou  $A_t = 2\pi R(R + H)$  → Área total  
 $V = \pi R^2 H$  → Volume

Obs.: Para o cilindro equilátero tem-se que  $H = 2R$



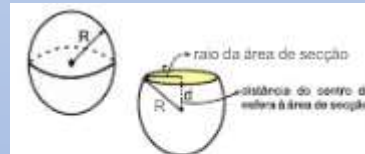
## Planificação



$A_b = \pi R^2$  → Área da base  
 $A_l = \pi R \cdot g$  → Área lateral  
 $A_t = A_b + A_l$  ou  $A_t = \pi R(g + R)$  → Área total  
 $V_t = \frac{\pi R^2 H}{3}$  → Volume

$g^2 = h^2 + R^2$  (relação pitagórica entre  $g$ ,  $H$  e  $R$ )

Obs.: Para o cone equilátero tem-se que  $g = 2R$



$A_t = 4 \cdot \pi R^2$  → Área total  
 $V_t = \frac{4}{3} \pi R^3$  → Volume  
 $R^2 = d^2 + r^2$  (relação pitagórica entre  $R$ ,  $d$  e  $r$ )

## 3. Pirâmides:

Triangular    Quadrangular    Hexagonal



$A_b$ : área da figurada base  
 $A_l$ : áreas dos triângulos que formam as faces laterais  
 $A_t = A_b + A_l$   
 $V = \frac{A_b \cdot H}{3}$

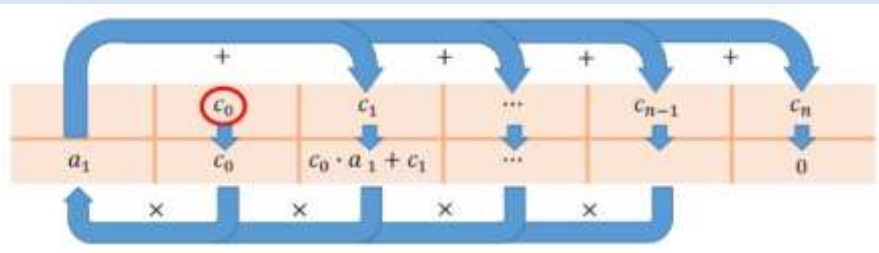
# POLINÔMIOS

**1. Raiz ou Zero de um Polinômio:** é o valor de  $x$  que anula o polinômio, ou seja,  $P(x) = 0$ . É o ponto onde a função polinomial intercepta o eixo das abscissas.

O **número de raízes** de um polinômio é dado pelo seu **grau**.

**Observação:** As raízes de um polinômio podem ser **reais** ou **imaginárias**.

**3. Dispositivo Prático de Briot – Ruffini:** vamos usar este dispositivo somente para a divisão de um polinômio  $P(x)$  por um divisor que apresentar grau igual a 1.



## 2. Divisão de Polinômios:

### I. Método da Chave:

Dada uma função polinomial  $P(x)$ , chamada dividendo e a função polinomial não identicamente nula  $D(x)$ , dividir  $P(x)$  por  $D(x)$  é obter uma função polinomial  $Q(x)$ , chamada quociente, e a função polinomial  $R(x)$ , chamada resto tal que:  $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$ , em que:

$$\begin{array}{r} P(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline R(x) \end{array} \quad \begin{array}{l} D(x) \\ \hline Q(x) \end{array} \quad \begin{array}{l} P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x) \\ \text{gr}^{\text{máx.}}[R(x)] = \text{gr}[D(x)] - 1 \end{array}$$

### 4. Teorema do Resto:

Sejam  $a$  e  $b$  constantes quaisquer.

O resto da divisão de um polinômio  $P(x)$  por  $ax - b$  é igual ao valor numérico da raiz do divisor no polinômio, ou seja,

$$R(x) = P(\text{raiz do divisor}(ax - b)).$$

### Teorema de D'Alembert:

Sejam  $a$  e  $b$  constantes quaisquer.

Um polinômio  $P(x)$  é divisível por  $ax - b$  se, e somente se,  $P(\text{raiz do divisor}(ax - b)) = 0$ .

# POLINÔMIOS



1. Definição: Obtemos uma equação algébrica quando queremos resolver  $P(x) = 0$ . Um polinômio  $P(x)$  de grau  $n$  apresenta exatamente  $n$  **raízes complexas (reais e/ou não reais)**, quando  $P(x) = 0$ .

2. **Teorema da Decomposição:** todo o polinômio de grau  $n$ , com  $n \geq 1$  pode ser escrito na forma de produtos de fatores do 1º grau:  
 $P(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$ , onde  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  são todas as raízes de  $P(x)$ .

3. **Multiplicidade de uma raiz:** é a quantidade de vezes que a raiz anula a equação polinomial. As raízes de uma equação polinomial podem ser todas distintas ou não.

**Raízes Imaginárias:** se o número complexo  $z = a + bi$  é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então o conjugado  $z = a - bi$  também é raiz dessa equação. Portanto, o número de raízes não reais de uma equação polinomial de coeficientes reais é necessariamente par.

#### Atenção:

Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau **ímpar**, então essa equação admite **pelo menos uma raiz real**.

4. **Teorema das Raízes Racionais:** seja  $p/q$  com  $p$  e  $q$  **inteiros e primos entre si** e  $q \neq 0$ . Se  $p/q$  é raiz de uma equação polinomial, **com coeficientes inteiros**, então  $p$  é divisor do **termo independente** e  $q$  é divisor **do coeficiente que acompanha  $x$  de maior grau**.

**Número de Raízes Nulas:** O número de raízes nulas de uma equação algébrica de termo independente nulo é igual ao menor expoente de  $x$ .

## Relações de Girard:

Relacionam os coeficientes da equação e suas raízes.

$$\text{Equações de grau 2: } ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Equações de grau 3:  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ P_1 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Equações de grau  $\geq 2$ :  $S = -\frac{b}{a}$  e  $P = \frac{\pm TIND}{a}$ , +se o grau for par; -se o grau for ímpar

# POLINÔMIOS

## Resumo Gráfico:

**Grau do polinômio é par:** a função começa e termina com o mesmo sinal.

**Grau do polinômio é ímpar:** a função começa com um sinal e termina com sinal contrário.

