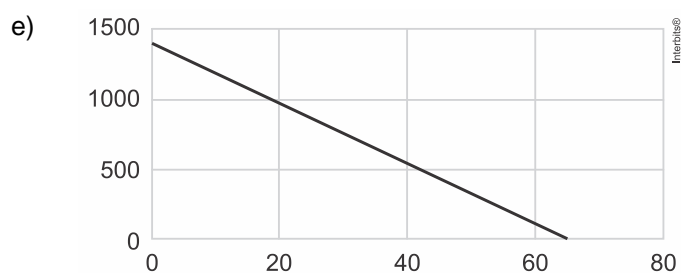
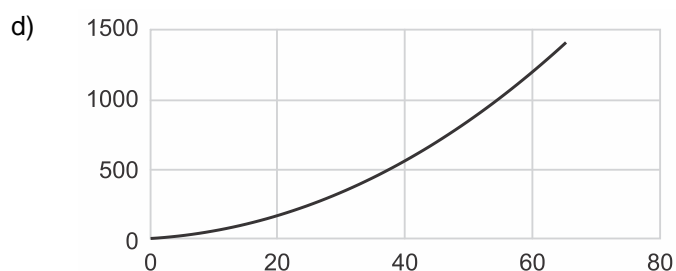
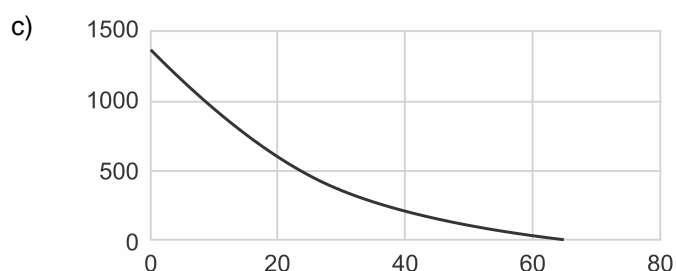
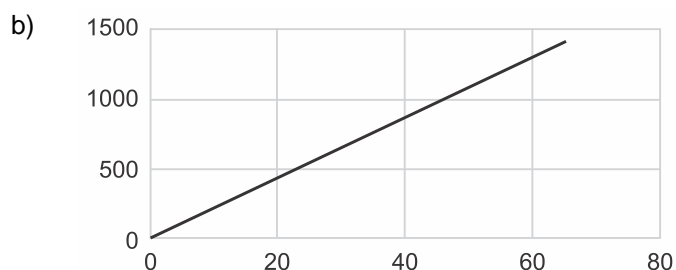
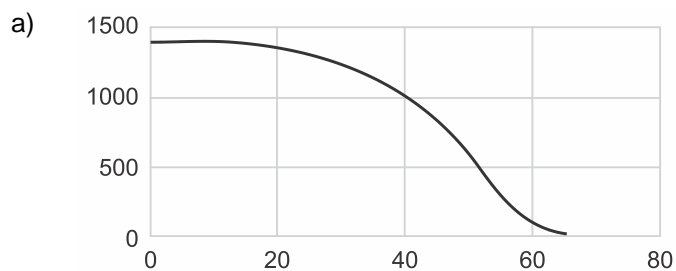


1. (Ufpr 2020) Considere a circunferência B, cuja equação no plano cartesiano é $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 21 = 0$. Qual das equações abaixo descreve uma circunferência que tangencia B?
- a) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 15$.
 - b) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 5$.
 - c) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 3$.
 - d) $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 10$.
 - e) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$.
2. (Ufpr 2020) No ano de 2018, a densidade populacional da cidade de Curitiba foi estimada em 4.406,96 habitantes por quilômetro quadrado. Supondo que a área territorial da cidade seja de 435 km², o número que mais se aproxima da população estimada de Curitiba em 2018 é:
- a) 1.916.610.
 - b) 1.916.760.
 - c) 1.917.027.
 - d) 1.917.045.
 - e) 1.917.230.
3. (Ufpr 2020) Uma adaptação do Teorema do Macaco afirma que um macaco digitando aleatoriamente num teclado de computador, mais cedo ou mais tarde, escreverá a obra "Os Sertões" de Euclides da Cunha. Imagine que um macaco digite sequências aleatórias de 3 letras em um teclado que tem apenas as seguintes letras: S, E, R, T, O. Qual é a probabilidade de esse macaco escrever a palavra "SER" na primeira tentativa?
- a) 1/5.
 - b) 1/15.
 - c) 1/75.
 - d) 1/125.
 - e) 1/225.
4. (Ufpr 2020) Define-se o erro da função f para o ponto (x, y) como sendo o valor $|f(x) - y|$ e o erro de f para o conjunto de pontos C como sendo a soma dos erros de f para todos os pontos de C . Entre as funções abaixo, qual possui o menor erro para o conjunto $C = \{(0, 5), (1, 3), (2, -1)\}$?
- a) $f_a(x) = -2,5x + 5$.
 - b) $f_b(x) = -4x + 7$.
 - c) $f_c(x) = -3x + 6$.
 - d) $f_d(x) = -3,5x + 5$.
 - e) $f_e(x) = -4x + 6$.
5. (Ufpr 2020) Suponha que, num período de 45 dias, o saldo bancário de uma pessoa possa ser descrito pela expressão
- $$S(t) = 10t^2 - 240t + 1400$$
- sendo $S(t)$ o saldo, em reais, no dia t , para $t \in [1, 45]$. Considerando os dados apresentados, é correto afirmar que:
- a) o saldo aumentou em todos os dias do período.

- b) o saldo diminuiu em todos os dias do período.
- c) o menor saldo no período ocorreu em $t = 12$.
- d) o menor saldo no período foi R\$ 12,00.
- e) o saldo ficou positivo em todos os dias do período.

6. (Ufpr 2020) Para esvaziar um reservatório que contém 1.430 litros de água, é aberta uma torneira em sua base. Supondo que a vazão dessa torneira seja constante e igual a 22 litros por minuto, qual dos gráficos abaixo descreve a quantidade de água no reservatório (em litros), em função do tempo (em minutos), a partir do momento em que a torneira é aberta?



7. (Ufpr 2020) Uma malharia produz camisetas personalizadas para eventos esportivos. Cada novo modelo possui um custo fixo de R\$ 450,00 mais R\$ 9,00 por camiseta produzida.

Sabendo que cada camiseta será vendida por R\$ 20,00, a desigualdade que permite calcular o número de camisetas a serem vendidas para que se tenha um lucro de no mínimo R\$ 1.000,00 é:

- a) $20n + 9(50 + n) \leq 1000$.
- b) $10(2n - 45) - 9n \leq 1000$.
- c) $9(50 + n) - 20n \geq 1000$.
- d) $10(45 + 2n) - 9n \geq 1000$.
- e) $20n - 9(50 + n) \geq 1000$.

8. (Ufpr 2020) A maior variação de maré do Brasil ocorre na baía de São Marcos, no estado do Maranhão. A diferença entre o nível mais alto e o nível mais baixo atingidos pela maré pode chegar a 8 metros em algumas épocas do ano. Suponha que em determinado dia do ano o nível da maré da baía de São Marcos possa ser descrito pela expressão

$$n(t) = 3 \operatorname{sen}((t - 5)\pi/6) + 4, \text{ com } t \in [0, 24]$$

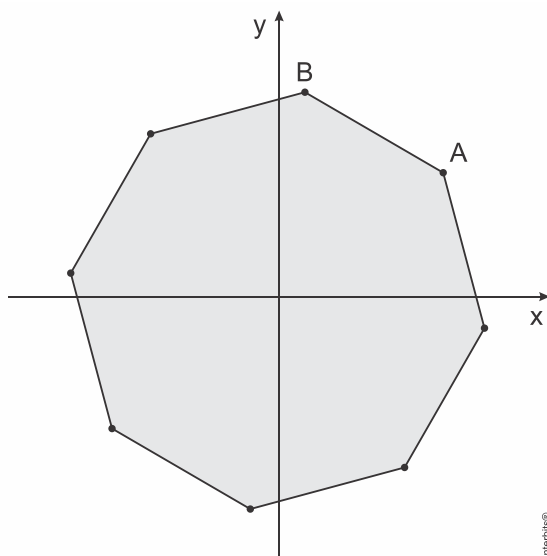
sendo t o tempo (medido em horas) e $n(t)$ o nível da maré no instante t (dado em metros). Com base nessas informações, considere as seguintes afirmativas:

1. O nível mais alto é atingido duas vezes durante o dia.
2. Às 11 h é atingido o nível mais baixo da maré.
3. Às 5 h é atingido o nível mais alto da maré.
4. A diferença entre o nível mais alto e o nível mais baixo é de 3 metros.

Assinale a alternativa correta.

- a) Somente a afirmativa 1 é verdadeira.
- b) Somente as afirmativas 1 e 4 são verdadeiras.
- c) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
- d) Somente as afirmativas 2, 3 e 4 são verdadeiras.
- e) As afirmativas 1, 2, 3 e 4 são verdadeiras.

9. (Ufpr 2020) A figura a seguir representa um octógono regular com centro sobre a origem do sistema cartesiano.

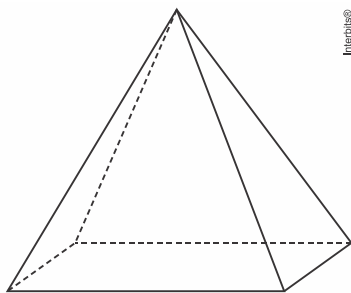


Intertec®

Se o vértice A desse octógono tem abscissa $x = 8$ e ordenada $y = 6$, conclui-se que a ordenada do vértice B é:

- 10.
- 12.
- $2 + 6\sqrt{2}$.
- $7\sqrt{2}$.
- $3 + 4\sqrt{3}$.

10. (Ufpr 2020) A pirâmide regular a seguir tem 12 cm de altura e sua base é um quadrado com 10 cm de lado.

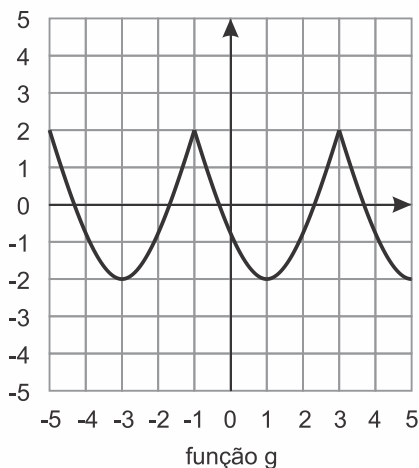
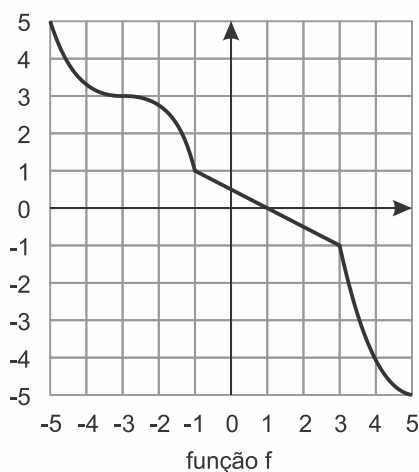


- Calcule o volume da pirâmide.
- Calcule a área total da pirâmide.

11. (Ufpr 2020) Em uma gincana escolar, cada uma das três equipes participantes recebe uma lista de tarefas. A primeira equipe a cumprir cada uma das tarefas dessa lista recebe 2 pontos, e as demais equipes não pontuam nessa tarefa.

- Qual é o número mínimo de tarefas que a lista deve ter para que se tenha certeza de que alguma equipe atinja a marca de 10 pontos?
- Após 5 tarefas da lista terem sido concluídas, qual é a probabilidade de alguma das equipes ter obtido exatamente 6 pontos?

12. (Ufpr 2020) Considere as funções f e g , cujos gráficos estão esboçados abaixo.

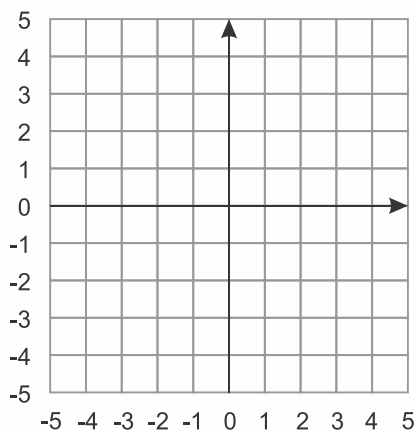


- Com base nos gráficos, preencha a tabela com os valores solicitados.

Dado	Valor
$g(1)$	

$f^{-1}(-4)$	
$f(f(-1))$	
$g(f(-3))$	

- b) Sabendo que a função g é periódica, com período $T = 4$, esboce o gráfico da função $h(x) = g(x + 1) - 2$.



13. (Ufpr 2020) Resolva as inequações abaixo.

- a) $x^2 - 9x - 10 > 0$.
 b) $x^3 - 9x - 10 > 0$.

14. (Ufpr 2020) Sendo x, y e z números reais, considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ x & 2 & 0 & 0 \\ y & z & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

- a) Supondo que $x = 1, y = 1$ e $z = -2$, calcule o produto de matrizes $A \cdot B$.
 b) Para quais valores de x, y e z a matriz B é a inversa da matriz A ?

15. (Ufpr 2020) O pH de uma substância é um valor que expressa a concentração de íons de hidrogênio $[H^+]$, medida em mol por litro (mol/ℓ), em uma solução aquosa. Para o cálculo do pH de uma substância, usa-se a expressão: $\text{pH} = -\log[H^+]$.

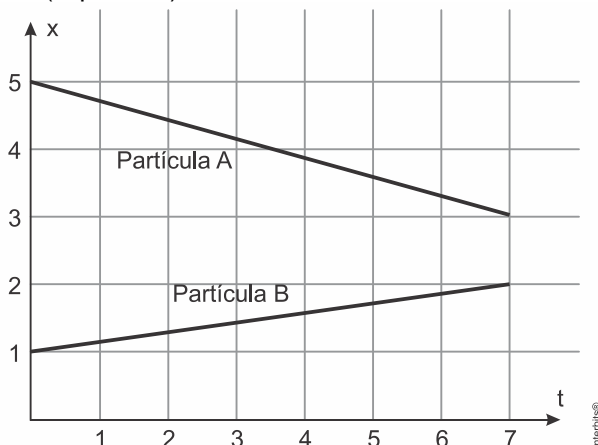
- a) Sabendo que a água possui $\text{pH} = 7$ e que uma bebida energética tem $\text{pH} = 3$, quantas vezes a concentração de íons hidrogênio $[H^+]$ é maior na bebida energética em relação à concentração na água?
 b) Constatou-se em laboratório que o suco de limão possui uma concentração de íons de hidrogênio $[H^+] = 0,0072 \text{ mol}/\ell$. Supondo que $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$, calcule o pH do suco de limão. Dê sua resposta na forma decimal.

16. (Ufpr 2020) Seja x um arco no primeiro quadrante.

- a) Encontre o valor de $\text{sen}(x)$, sabendo que $\text{cos}(x) = \frac{3}{8}$.

b) Encontre o valor de $\sin(x)$, sabendo que $8 \operatorname{tg}(x) = 3 \cos(x)$.

17. (Ufpr 2021)



O gráfico descreve o deslocamento em metros, em relação ao tempo em segundos, de duas partículas A e B, ambas movendo-se em linha reta. A respeito dessas partículas, considere as seguintes afirmativas:

1. A partícula B percorreu $\sqrt{50}$ metros em 7 segundos.
2. O deslocamento da partícula A é dado pela função $x(t) = 5 - \frac{2t}{7}$.
3. As partículas A e B estão se aproximando ao longo do deslocamento.
4. A velocidade da partícula A é o dobro da velocidade da partícula B.

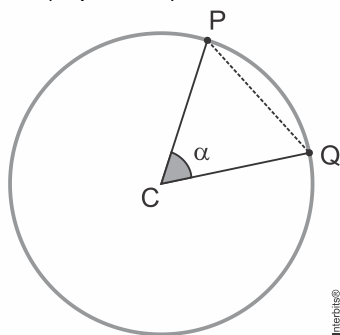
Assinale a alternativa correta.

- a) Somente a afirmativa 2 é verdadeira.
- b) Somente as afirmativas 1 e 4 são verdadeiras.
- c) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
- d) Somente as afirmativas 1, 3 e 4 são verdadeiras.
- e) As afirmativas 1, 2, 3 e 4 são verdadeiras.

18. (Ufpr 2021) O manual de instruções de uma balança de precisão informa que o erro cometido na aferição de objetos de até 500 g é de no máximo 0,5%. Se um objeto de 70 g for colocado nessa balança, o valor registrado por ela será de no máximo:

- a) 70,035 g.
- b) 70,350 g.
- c) 73,500 g.
- d) 75,000 g.
- e) 75,500 g.

19. (Ufpr 2021)

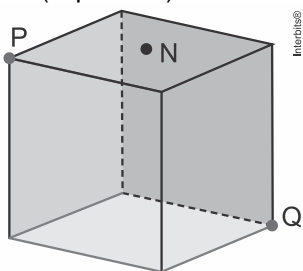


Na figura, há uma circunferência de centro C . Se o ângulo α mede $\pi/3$ radianos, a razão

entre a área do setor circular PCQ e a área do triângulo PCQ é:

- a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$
- b) $\frac{2\pi}{3}$
- c) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$
- d) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$
- e) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$

20. (Ufpr 2021)



Considere o cubo de aresta 2 cm na figura, em que os pontos P e Q são vértices do cubo e N é o centro de uma das faces. Duas partículas A e B se deslocam sobre a superfície do cubo, percorrendo o caminho mais curto possível. A partícula A inicia sua trajetória em P e encerra em Q, e a partícula B vai do ponto P ao ponto N e em seguida ao ponto Q. Qual é a diferença em módulo, em cm, entre as distâncias percorridas pelas duas partículas?

- a) $6 + \sqrt{2} - \sqrt{5}$.
- b) $2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$.
- c) $4 + \sqrt{2}$.
- d) $4 + 2\sqrt{2}$.
- e) $\sqrt{2} + \sqrt{10} - 2\sqrt{5}$.

21. (Ufpr 2021) Ana, Beatriz e Carlos pediram uma pizza de oito fatias, metade sabor mozzarella e outra metade sabor calabresa. Sabendo que Ana e Carlos preferem calabresa e Beatriz prefere mozzarella, após cada um dos três ter escolhido uma fatia de pizza de acordo com sua preferência, qual é a probabilidade de Ana, Beatriz e Carlos terem escolhido pedaços que estejam lado a lado na pizza?

- a) $\frac{1}{12}$
- b) $\frac{1}{6}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{1}{3}$
- e) $\frac{1}{2}$

22. (Ufpr 2021) O estágio inicial de um modelo epidemiológico, que mede o número de pessoas infectadas em uma população, é descrito pela função $I(t) = I_0 2^{rt}$, em que $I(t)$ representa o número de infectados da população, $I_0 > 0$ representa o número inicial de

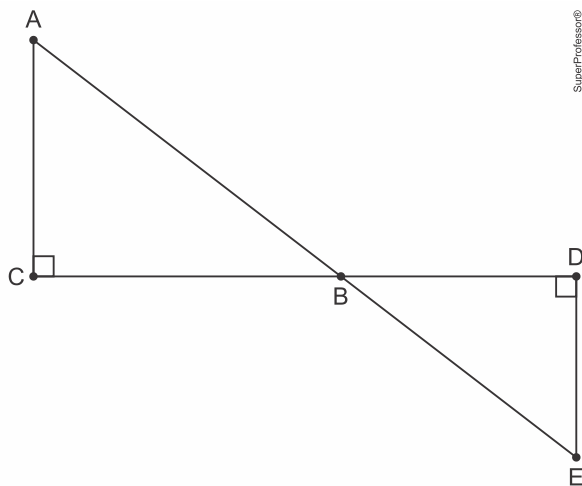
infectados, $r > 0$ representa a taxa de contágio e t é o tempo medido em dias desde o início da epidemia. Com relação ao número de infectados, é correto afirmar:

- Caso a taxa de infectados r esteja no intervalo $(0, 1)$, então o número de infectados $I(t)$ decresce conforme os dias passam.
- Caso $I_0 = 3$ e $r = 2,3$, então o número de infectados $I(t)$ aumenta desde o primeiro dia até atingir um máximo por volta do sexto dia, e depois começa a decrescer.
- Caso $I_0 = 1$ e $r = 1$, então a cada dia que passa a quantidade de infectados $I(t)$ aumenta em 2.
- Caso $I_0 = 1$ e $r = 0,5$, então é necessário pelo menos 20 dias para que o número de infectados $I(t)$ seja maior que 1.000.
- Se a taxa de contágio r aumentar, então haverá menos pessoas infectadas conforme os dias passam.

23. (Ufpr 2022) Após pagar o valor da conta da pizzaria, Ana, Beatriz e Carlos voltaram para casa. No caminho, ninguém se recordava de quanto foi exatamente o valor da conta. Ana lembrava que a conta deu um valor inteiro e menor que 200 reais. Beatriz lembrava que deu um valor maior que 50 reais. Carlos lembrou que a soma dos algarismos do valor da conta dava 6. Admitindo que todos estavam certos, quantos são os valores possíveis para a conta?

- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.

24. (Ufpr 2022) Na figura a seguir, considere os segmentos de reta AE e CD , e os triângulos retângulos ABC e BDE . Suponha que o comprimento de AB é igual a x , e que o comprimento de AC é igual a y . Considerando que os segmentos AC e BD têm o mesmo comprimento, qual das alternativas abaixo corresponde ao valor do comprimento do segmento DE ?



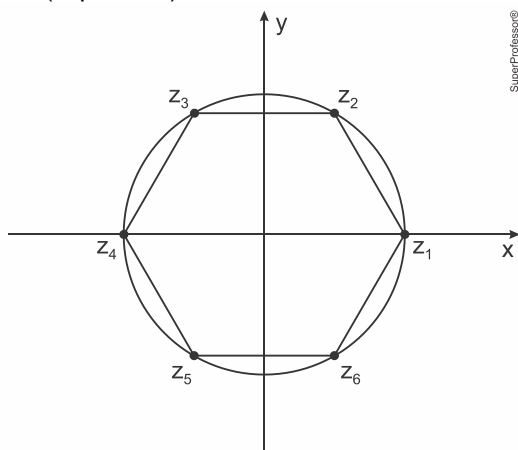
- $\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$
- $\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{y}$
- $y\sqrt{x^2 - y^2}$
- $\frac{y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

e) $\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{y^2}$

25. (Ufpr 2022) No plano cartesiano, considere o triângulo ABC com $A = (8, 6)$, $B = (3, -4)$ e $C = (-1, 2)$. Seja D o ponto de intersecção do segmento AB com o eixo x. Se r é a reta que passa por D, sendo essa reta paralela à reta que passa por B e C, assinale a alternativa que corresponde à equação de r.

- $3x + 2y = 15.$
- $2x + 3y = 10.$
- $3x + 2y = 8.$
- $3x + 2y = 3.$
- $2x + 3y = 2.$

26. (Ufpr 2022)



Na figura, temos uma circunferência de raio $r > 0$ com centro na origem do plano complexo e, ao longo da circunferência, temos 6 números complexos: $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$. Supondo que os 6 números complexos são vértices de um hexágono regular e que z_1 está no eixo x, considere as seguintes equações:

- $\overline{z_2} + z_6 = r^2$
- $\overline{z_3} = z_5$
- $z_2 \cdot z_3 = z_4$
- $\frac{z_5}{z_6} = \frac{z_6}{r}$

Assinale a alternativa correta.

- Somente a equação 3 é verdadeira.
- Somente as equações 1 e 3 são verdadeiras.
- Somente as equações 2 e 4 são verdadeiras.
- Somente as equações 1, 2 e 4 são verdadeiras.
- As equações 1, 2, 3 e 4 são verdadeiras.

27. (Ufpr 2022) Uma fábrica de calçados possui um custo fixo mensal de R\$ 20.000,00 relacionado a pagamentos de salários, aluguel e outras despesas fixas. Sabendo que, a cada par de calçados produzido, essa fábrica fatura R\$ 28,00, a expressão que descreve o lucro mensal, em reais, em função do número x de calçados produzidos é:

- $20.000x - 28.$
- $28x - 20.000.$
- $28x + 20.000.$
- $-28x + 20.000.$
- $-20.000x + 28.$

28. (Ufpr 2022) Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \theta & 7 & -\operatorname{cos} \theta \\ \operatorname{cos} \theta & 7 & \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & 13 & \operatorname{cos} \theta \end{pmatrix}$$

Assinale a alternativa que corresponde à soma dos valores de $\theta \in [0, \pi]$ que satisfazem $\det A = -13$.

- a) $\frac{\pi}{4}$
- b) $\frac{2\pi}{3}$
- c) $\frac{3\pi}{4}$
- d) 2π
- e) 4π

29. (Ufpr 2023) Considere as equações $a + b = c^2$ e $a + b + c = 20$. Assinale a alternativa que corresponde à quantidade de triplas ordenadas (a, b, c) que satisfazem simultaneamente essas duas equações, sendo a, b, c números inteiros positivos.

- a) 11.
- b) 12.
- c) 13.
- d) 14.
- e) 15.

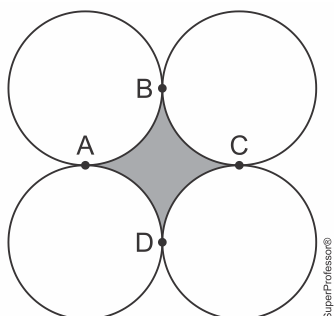
30. (Ufpr 2023) O Índice de Massa Corporal (IMC) de uma pessoa adulta é dado pela fórmula:

$$\text{IMC} = \frac{\text{massa}}{(\text{altura})^2} \quad \frac{(\text{massa medida em quilogramas})}{(\text{altura a medida em metros})^2}$$

Admitindo-se que a altura de uma pessoa adulta é constante, se, durante um ano, ela aumentar sua massa, então é correto afirmar que nesse período o gráfico de seu IMC em função de sua massa é parte de uma:

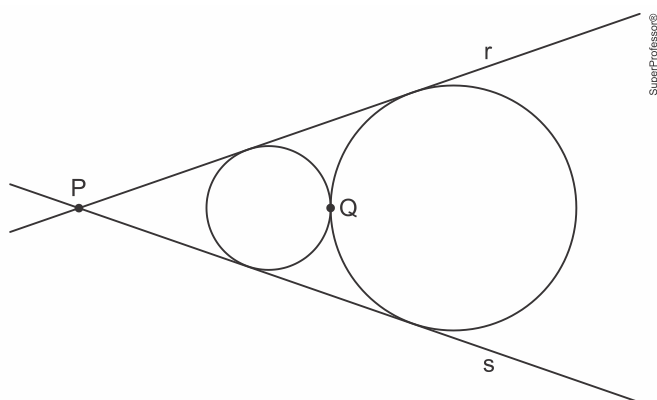
- a) reta horizontal.
- b) reta crescente.
- c) curva crescente côncava para cima.
- d) parábola.
- e) senoide.

31. (Ufpr 2023) Na figura ao lado, estão representadas quatro circunferências de raio $r = 1$ cm que são tangentes nos pontos A, B, C e D. Assinale a alternativa que corresponde ao valor, em cm^2 , da área hachurada em cinza.



- a) $\pi - 1$.
 b) $\pi - 2$.
 c) $2 - \frac{\pi}{2}$.
 d) $4 - \pi$.
 e) $4 - \frac{\pi}{2}$.

32. (Ufpr 2023) Na figura ao lado, tem-se duas circunferências que se tangenciam no ponto Q. Os raios dessas circunferências são R_1 e R_2 , com $R_1 < R_2$. Cada uma das retas r e s é tangente simultaneamente às duas circunferências; adicionalmente, essas retas se intersectam no ponto P. Qual é a distância entre os pontos P e Q?

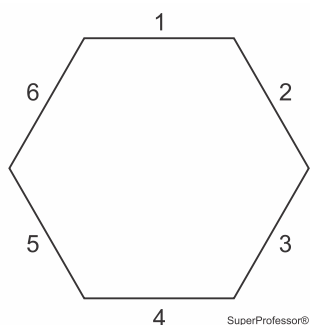


- a) $2 \frac{R_1 + R_2}{R_2 - R_1}$.
 b) $2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$.
 c) $2 \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_1}$.
 d) $2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}$.
 e) $2 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$.

33. (Ufpr 2023) Sejam r e s retas no plano cartesiano que são perpendiculares e se intersectam no ponto $(3, 3)$. Sabendo-se que a reta r intersecta o eixo x no ponto $(2, 0)$, assinale a alternativa que corresponde ao valor numérico da área do triângulo delimitado pelas retas r e s e pelo eixo x .

- a) 12.
 b) 15.
 c) 21.
 d) 24.
 e) 30.

34. (Ufpr 2023) Ana, Beatriz e Carlos escolhem lugares para se sentar em uma mesa hexagonal regular. Cada lugar corresponde a um dos lados do hexágono, que estão numerados de 1 a 6, conforme a figura ao lado. Os lados 1 e 4 são considerados lados opostos na mesa, assim como 2 e 5, e 3 e 6. De quantas formas diferentes Ana, Beatriz e Carlos podem escolher os lugares numerados de modo que nenhum deles fique sentado ao lado oposto do outro?



- a) 48.
b) 36.
c) 24.
d) 12.
e) 8.

35. (Ufpr 2023) Os ângulos internos de um polígono convexo de 20 lados estão em progressão aritmética com razão de 4° (graus). Qual é o produto em graus entre o maior ângulo interno e o menor ângulo interno desse polígono?

- a) 20.800.
b) 22.600.
c) 24.800.
d) 26.600.
e) 26.800.

36. (Ufpr 2023) As únicas raízes reais do polinômio $p(x)$ dado pelo determinante abaixo são -2 e -1 .

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} q(x) & x+2 & x^2+2x \\ x^2+x & 0 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

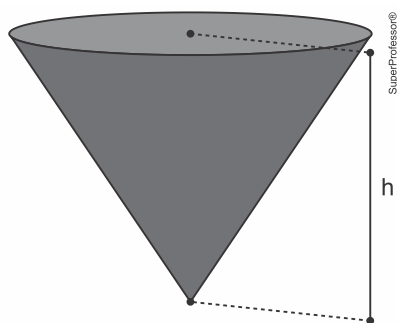
Sabendo-se que o polinômio $q(x) = ax^2 + bx + c$ (com a , b e c constantes) tem as mesmas raízes reais de $p(x)$, é correto afirmar que:

- a) $b^2 - 4ac < 0$ e $a > \frac{3}{4}$.
b) $b^2 - 4ac < 0$ e $a < \frac{3}{4}$.
c) $b^2 - 4ac > 0$ e $a < \frac{3}{4}$.
d) $b^2 - 4ac > 0$ e $a > \frac{3}{4}$.
e) $b^2 - 4ac > 0$ e $a = \frac{3}{4}$.

37. (Ufpr 2023) Na figura ao lado, tem-se um reservatório no formato de um cone circular reto com altura h e área do topo igual a 12m^2 . Esse reservatório está sendo preenchido com um líquido cujo volume em m^3 é dado por:

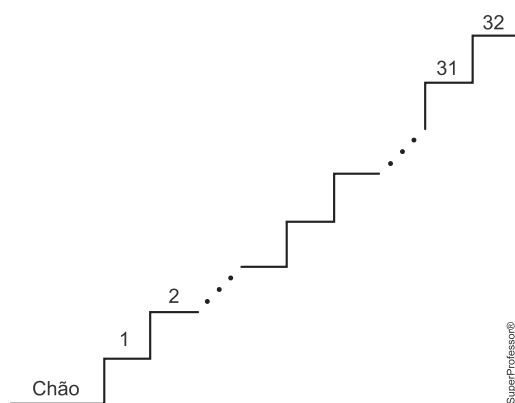
$$V(t) = \log_2(t^2 + 1)$$

sendo $t \geq 0$ o tempo. Em quanto tempo o líquido atingirá metade da capacidade desse reservatório?



- a) $t = \sqrt{4^h - 1}$.
 b) $t = 2^h - 1$.
 c) $t = \sqrt{2^h - 1}$.
 d) $t = 4^h - 1$.
 e) $t = \sqrt{4^h + 1}$.

38. (Ufpr 2024) Beatriz estava na escadaria de seu prédio, que tem 32 degraus, numerados conforme a figura abaixo. Ela, primeiramente, desceu 6 degraus e depois subiu 12 degraus, percebendo que ainda faltavam 5 degraus para chegar no topo da escadaria. Em que degrau ela estava inicialmente?

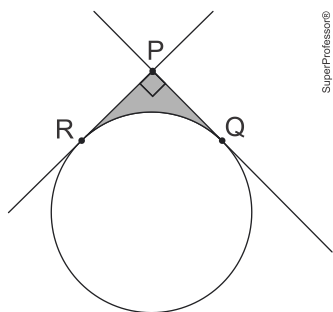


- a) 10
 b) 12
 c) 17
 d) 21
 e) 27

39. (Ufpr 2024) Ana quer descobrir a senha do celular de seu irmão Carlos, a qual é formada por uma sequência de quatro dígitos numéricos dentre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Ela sabe que o irmão sempre usa, em suas senhas, os três dígitos de sua residência: 4, 6 e 8. Recentemente, ela descobriu que o número formado pela senha é ímpar. De acordo com essas informações, quantas possibilidades Ana deve considerar para descobrir a senha de Carlos?

- a) 8
 b) 11
 c) 15
 d) 24
 e) 30

40. (Ufpr 2024) Duas retas no plano se intersectam no ponto P, formando um ângulo reto. Além disso, essas retas são tangentes a uma circunferência nos pontos Q e R, conforme ilustra a figura abaixo. Sabendo que o perímetro da região hachurada mede $(2\pi + 8)$ cm, assinale a alternativa que corresponde à medida do raio da circunferência em cm.



- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 6

41. (Ufpr 2024) Sejam $p(x) = x + a$ e $q(x) = x^2 - b$ funções, com a e b números reais. Sabendo que $r = \frac{1}{2}$ é a única raiz da função composta $f(x) = q(p(x))$, assinale a alternativa que corresponde à soma $a + b$.

- a) -2
- b) -1
- c) $-\frac{1}{2}$
- d) $\frac{1}{2}$
- e) 2

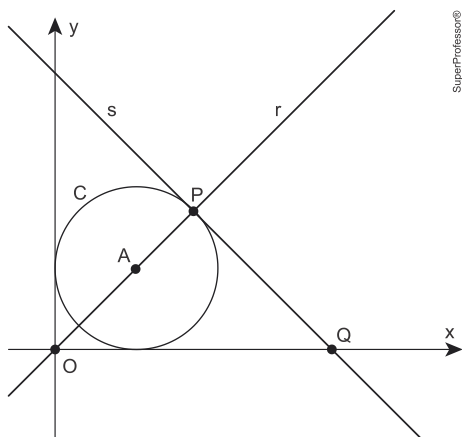
42. (Ufpr 2024) Sabendo que $\sin(2x) = \frac{3}{5}$, assinale a alternativa que corresponde ao valor de $[\sin(x) + \cos(x)]^2$.

- a) 0,8
- b) 1,0
- c) 1,2
- d) 1,4
- e) 1,6

43. (Ufpr 2024) Considere a função $f(x) = -x^2 + 6x - 8$. No plano cartesiano, sejam P e Q as intersecções do gráfico de f com o eixo x . Sendo $R = (a, b)$ um ponto do gráfico de f , com $b > 0$, assinale a alternativa que corresponde ao maior valor numérico possível da área do triângulo PQR .

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 6

44. (Ufpr 2024) A circunferência C na figura abaixo está centrada no ponto $A = (1, 1)$ e tangencia os eixos coordenados. A reta r passa pela origem O e pelo ponto A , intersectando a circunferência no ponto P , conforme indica a figura. A reta s é tangente à circunferência no ponto P e intersecta o eixo x no ponto Q . Assinale a alternativa que corresponde à abscissa do ponto Q .



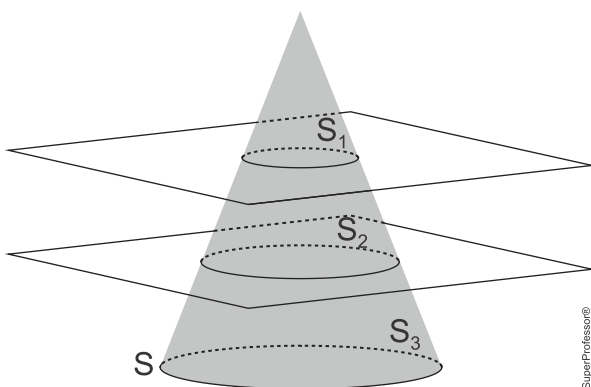
- a) $2\sqrt{2}$
- b) $3\sqrt{2} - 1$
- c) $1 + 2\sqrt{2}$
- d) $4\sqrt{2} - 2$
- e) $2 + \sqrt{2}$

45. (Ufpr 2024) Um bolo é retirado do forno e começa a resfriar segundo a expressão $T(t) = 30 + 150a^{-0,05t}$, com $a > 1$, sendo T a temperatura do bolo e t o tempo decorrido em minutos.

Assinale a alternativa que corresponde ao tempo em que o bolo atingirá a metade da temperatura inicial que apresentava quando foi retirado do forno em $t = 0$. (Use se necessário $\log_a 2 = 0,7$ e $\log_a 5 = 1,6$).

- a) 10 minutos
- b) 12 minutos
- c) 16 minutos
- d) 18 minutos
- e) 22 minutos

46. (Ufpr 2024) Um cone circular reto S é dividido por dois planos paralelos à sua base, formando três sólidos S_1 , S_2 , S_3 , conforme a figura abaixo. Os volumes de S_1 , S_2 e S_3 , nessa ordem, estão em progressão geométrica com razão $q > 1$. O quociente entre o raio do cone S e o raio do cone menor S_1 é igual a $\sqrt[3]{7}$. Assinale a alternativa que corresponde à razão q .



- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 7

Gabarito:**Resposta da questão 1:**

[B]

Sejam as circunferências de centros em C_1 e C_2 , cujos raios são, respectivamente, r_1 e r_2 .

Tais circunferências são tangentes se, e somente se,

$$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2 \text{ ou } d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|,$$

em que $d(C_1, C_2)$ é a distância entre C_1 e C_2 .

Completando os quadrados, temos

$$x^2 + y^2 - 8x + 10y + 21 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y + 5)^2 = (2\sqrt{5})^2.$$

Logo, o centro da circunferência B é $(4, -5)$ e seu raio é igual a $2\sqrt{5}$.

Sendo os raios das circunferências exibidas nas alternativas iguais a $\sqrt{15}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$ e 3,

podemos concluir que a candidata mais forte a tangente é a de equação $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 5$

(o único radical semelhante a $2\sqrt{5}$ é $\sqrt{5}$). Com efeito, a distância entre os centros é

$$\sqrt{(4 + 2)^2 + (-5 + 2)^2} = 3\sqrt{5}$$

e a soma dos raios é igual a $2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

Portanto, segue que B e $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 5$ são tangentes exteriormente.

Resposta da questão 2:

[C]

Sabendo que a densidade demográfica de uma região é a razão entre a população e a área da região, podemos afirmar que a resposta é

$$4406,96 \cdot 435 \cong 1.917.028.$$

Resposta da questão 3:

[D]

O número de sequências possíveis é igual a $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Logo, a probabilidade pedida é igual

$$\text{a } \frac{1}{125}.$$

Resposta da questão 4:

[A]

Tem-se que

$$\begin{aligned} |f_a(0) - 5| + |f_a(1) - 3| + |f_a(2) + 1| &= |5 - 5| + |2,5 - 3| + |0 + 1| \\ &= 1,5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f_b(0) - 5| + |f_b(1) - 3| + |f_b(2) + 1| &= |7 - 2| + |3 - 3| + |-1 + 1| \\ &= 5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f_c(0) - 5| + |f_c(1) - 3| + |f_c(2) + 1| &= |6 - 5| + |3 - 3| + |0 + 1| \\ &= 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f_d(0) - 5| + |f_d(1) - 3| + |f_d(2) + 1| &= |5 - 5| + |1,5 - 3| + |-2 + 1| \\ &= 2,5 \end{aligned}$$

e

$$|f_e(0) - 5| + |f_e(1) - 3| + |f_e(2) + 1| = |6 - 5| + |2 - 3| + |-2 + 1| = 3.$$

Por conseguinte, f_a é a que possui menor erro.

Resposta da questão 5:

[C]

Reescrevendo a lei de S na forma canônica, vem

$$\begin{aligned} S(t) &= 10t^2 - 240t + 1400 \\ &= 10(t - 12)^2 - 40. \end{aligned}$$

Desse modo, o valor mínimo de S ocorre para $t = 12$ e é igual a $S(12) = -R\$ 40,00$.

Resposta da questão 6:

[E]

Seja V o volume de água no reservatório após t minutos da abertura da torneira. Logo, se a vazão da torneira é constante e igual a 22 litros por minuto, temos $V = -22t + 1430$.

O reservatório estará vazio quando t for tal que

$$0 = -22t + 1430 \Leftrightarrow t = 65 \text{ min.}$$

Portanto, como V é dado por uma função afim decrescente, só pode ser o gráfico da alternativa [E].

Resposta da questão 7:

[E]

Seja n o número de camisetas que devem ser produzidas e vendidas a fim de alcançar a meta desejada. Assim, como a receita é dada por $20n$ e o custo total é igual a $9n + 450$, deve-se ter $20n - (9n + 450) \geq 1000 \Leftrightarrow 20n - 9(n + 50) \geq 1000$.

Resposta da questão 8:

[A]

[1] Verdadeira. Tem-se que

$$n(t) = 3 \operatorname{sen} \left(\frac{t\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} \right) + 4.$$

Sabendo que o período fundamental da função seno é 2π , podemos concluir que o período de n é

$$\frac{2\pi}{\left| \frac{\pi}{6} \right|} = 12 \text{ h.}$$

Portanto, como em 24 horas temos dois períodos completos, segue que o nível mais alto é atingido duas vezes durante o dia.

[2] Falsa. O nível mais alto ocorre quando $\operatorname{sen} \left(\frac{t\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} \right) = 1$, resultando em $3 + 4 = 7$ m.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}n(11) &= 3 \operatorname{sen}\left(\frac{(11-5)\pi}{6}\right) + 4 \\ &= 3 \operatorname{sen}(\pi) + 4 \\ &= 4 \text{ m.}\end{aligned}$$

[3] Falsa. O nível mais baixo ocorre quando $\operatorname{sen}\left(\frac{t\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right) = -1$, correspondendo a $-3 + 4 = 1$ m. Porém, segue que

$$\begin{aligned}n(11) &= 3 \operatorname{sen}\left(\frac{(5-5)\pi}{6}\right) + 4 \\ &= 3 \operatorname{sen}(0) + 4 \\ &= 4 \text{ m.}\end{aligned}$$

[4] Falsa. Na verdade, essa diferença corresponde a $7 - 1 = 6$ m, conforme [2] e [3].

Resposta da questão 9:

[D]

Seja O a origem do plano de Argand-Gauss. Tem-se que o ângulo AOB corresponde a $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. Logo, o vértice B é o resultado da rotação do vértice A , em torno da origem, de um ângulo de 45° , no sentido anti-horário, ou seja,

$$B = (8 + 6i)(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$$

$$\begin{aligned}&= (8 + 6i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= \sqrt{2} + 7\sqrt{2}i.\end{aligned}$$

A resposta é $7\sqrt{2}$.

Resposta da questão 10:

a) O volume da pirâmide é dado por

$$\frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12 = 400 \text{ cm}^3.$$

b) Se o apótema da base da pirâmide mede $\frac{10}{2} = 5$ cm, então o apótema da pirâmide mede 13 cm. De fato, o triângulo retângulo de catetos 5 cm e 12 cm é pitagórico e sua hipotenusa mede 13 cm. Em consequência, a área total da pirâmide é igual a $10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 13 = 360 \text{ cm}^2$.

Resposta da questão 11:

a) Vamos supor que toda tarefa proposta será cumprida por pelo menos uma das três equipes.

Considerando o pior caso, isto é, todas as equipes empatadas com 8 pontos, podemos afirmar, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que a resposta é $3 \cdot 4 + 1 = 13$.

b) **1ª Solução:** Supondo que as três equipes têm a mesma probabilidade de cumprir uma tarefa, segue que a probabilidade de sucesso é $\frac{1}{3}$ e, portanto, a de fracasso é $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Logo, a probabilidade de uma equipe em particular alcançar 6 pontos em 5 tarefas é

$$P(k=3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}.$$

Por conseguinte, a probabilidade de alguma das equipes ter obtido exatamente 6 pontos é igual a $3 \cdot \frac{40}{243} = \frac{40}{81}$.

2ª Solução: O espaço amostral da quantidade de tarefas cumpridas pelas três equipes é $\Omega = \{\{0, 0, 5\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 1, 3\}, \{1, 2, 2\}\}$.

Existem 3 possibilidades para $\{0, 0, 5\}$.

Podemos distribuir quatro tarefas para uma equipe e uma tarefa para outra equipe de

$$\binom{5}{4} \cdot \binom{1}{1} = 5 \text{ maneiras. Portanto, temos } 5 \cdot 3! = 30 \text{ possibilidades para } \{0, 1, 4\}.$$

Existem $\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = 10$ modos de distribuir três tarefas para uma equipe e duas tarefas para

outra equipe. Assim, existem $10 \cdot 3! = 60$ possibilidades para $\{0, 2, 3\}$.

Podemos distribuir três tarefas para uma equipe e uma tarefa para cada uma das outras duas equipes de

$$\frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1}}{2!} = 10$$

maneiras. Logo, existem $10 \cdot 3! = 60$ possibilidades para $\{1, 1, 3\}$.

Podemos distribuir quatro tarefas para duas equipes, de modo que cada uma fique com duas tarefas, e outra tarefa para a equipe restante de

$$\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1}}{2!} = 15$$

modos. Por conseguinte, existem $15 \cdot 3! = 90$ possibilidades para $\{1, 2, 2\}$.

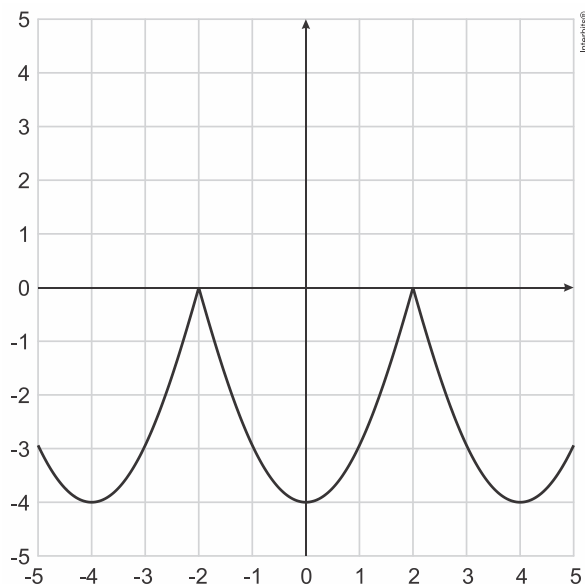
Em consequência, sendo $60 + 60 = 120$ o número de casos favoráveis e $3 + 30 + 60 + 60 + 90 = 243$ o número de casos possíveis, podemos concluir que a resposta é $\frac{120}{243} = \frac{40}{81}$.

Resposta da questão 12:

a) De acordo com o gráfico de g , temos $g(1) = -2$. Como $f(4) = -4$, vem $f^{-1}(-4) = 4$. Sendo $f(-1) = 1$, encontramos $f(f(-1)) = f(1) = 0$. Se $f(-3) = 3$, então $g(f(-3)) = g(3) = 2$.

Dado	Valor
$g(1)$	-2
$f^{-1}(-4)$	4
$f(f(-1))$	0
$g(f(-3))$	2

b) Seja $e(x) = g(x+1)$. O gráfico de e corresponde ao gráfico de g deslocado de uma unidade no sentido negativo do eixo das abscissas. Daí, segue que o gráfico de h corresponde ao gráfico de e deslocado de duas unidades no sentido negativo do eixo das ordenadas. Abaixo tem-se o gráfico de h .

**Resposta da questão 13:**

a) Tem-se que

$$x^2 - 9x - 10 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-10) > 0$$

$$\Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 10.$$

Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 10\}$.

b) Por inspeção, concluímos que $x = -2$ é raiz do polinômio $x^3 - 9x - 10$. Logo, pelo dispositivo de Briot-Ruffini, temos

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -9 & -10 \\ & & -2 & -5 & 0 \end{array}$$

Assim, vem

$$x^3 - 9x - 10 > 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 2x - 5) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1+\sqrt{6})(x-1-\sqrt{6}) > 0$$

$$\Leftrightarrow -2 < x < 1-\sqrt{6} \text{ ou } x > 1+\sqrt{6}.$$

Em consequência, o conjunto solução da inequação é

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1-\sqrt{6} \text{ ou } x > 1+\sqrt{6}\}.$$

Resposta da questão 14:a) Tem-se que $A \cdot B$ é igual a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ x & 2 & 0 & 0 \\ y & z & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 & 3-2+4-5 & 2-1+2-3 \\ 1-1 & -1+2 & 3+2-5 & 2+1-3 \\ 0 & 0 & 3x+4 & 2x+2 \\ 0 & 0 & 3y+2z & 2y+z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3x+4 & 2x+2 \\ 0 & 0 & 3y+2z & 2y+z \end{pmatrix}.$$

Logo, se $x = 1$, $y = 1$ e $z = -2$, então

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Se B é a inversa de A , então $A \cdot B = B \cdot A = I_4$. Logo, vem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3x+4 & 2x+2 \\ 0 & 0 & 3y+2z & 2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, devemos ter

$$\begin{cases} 3x+4=1 \\ 3y+2z=0 \\ 2x+2=0 \\ 2y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-3 \end{cases}.$$

Em consequência, como para tais valores de x , y e z a condição $B \cdot A = I_4$ também é cumprida (verifique!), segue o resultado.

Resposta da questão 15:

a) Tem-se que

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] \Leftrightarrow [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}}.$$

Se a e b são, respectivamente, a concentração de íons de hidrogênio na água e na bebida energética, então

$$\frac{b}{a} = \frac{10^{-3}}{10^{-7}} \Leftrightarrow b = 10^4 \cdot a,$$

ou seja, a concentração de íons de hidrogênio $[\text{H}^+]$ é dez mil vezes maior na bebida energética em relação à concentração na água.

b) Sendo $[\text{H}^+] = 0,0072 \text{ mol}/\ell$, vem

$$\text{pH} = -\log 0,0072$$

$$= -\log \frac{2^3 \cdot 3^2}{10^4}$$

$$= \log \frac{10^4}{2^3 \cdot 3^2}$$

$$= \log 10^4 - \log(2^3 \cdot 3^2)$$

$$= 4 \cdot \log 10 - 3 \cdot \log 2 - 2 \cdot \log 3$$

$$\cong 4 \cdot 1 - 3 \cdot 0,3 - 2 \cdot 0,48$$

$$\cong 2,14.$$

Resposta da questão 16:

a) Sabendo que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ para todo α real e $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{55}}{8}.\end{aligned}$$

b) Se $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $0 < \operatorname{sen} x < 1$ e, portanto, vem

$$\begin{aligned}8 \operatorname{tg} x = 3 \cos x &\Rightarrow 8 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 3 \cos x \\ &\Rightarrow 8 \operatorname{sen} x = 3 \cos^2 x \\ &\Rightarrow 3 \operatorname{sen}^2 x + 8 \operatorname{sen} x - 3 = 0 \\ &\Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Resposta da questão 17:

[C]

Vamos supor que o gráfico descreva a posição das duas partículas em função do tempo. Logo, a posição da partícula A em função do tempo t é igual a

$$\begin{aligned}x_A(t) &= \frac{3-5}{7-0} \cdot t + 5 \\ &= -\frac{2}{7}t + 5.\end{aligned}$$

Por outro lado, a posição da partícula B em função do tempo t é

$$\begin{aligned}x_B(t) &= \frac{2-1}{7-0} \cdot t + 1 \\ &= \frac{1}{7}t + 1.\end{aligned}$$

[1] Falsa. Na verdade, tem-se que

$$\begin{aligned}x_B(7) - x_B(0) &= 2 - 1 \\ &= 1 \text{ m.}\end{aligned}$$

[2] Verdadeira. Conforme mostramos, e fazendo a ressalva da substituição da palavra *deslocamento* pela palavra *posição*.

[3] Verdadeira. Supondo que as partículas se deslocam em uma mesma reta, a distância, d , entre elas é dada por

$$\begin{aligned}d &= -\frac{2}{7}t + 5 - \frac{1}{7}t - 1 \\ &= \left(4 - \frac{3}{7}t\right) \text{ m.}\end{aligned}$$

Assim, entre os instantes $t = 0$ e $t = \frac{28}{3}$ s as partículas se aproximam.

[4] Falsa. O dobro de $\frac{1}{7}$ m/s é $\frac{2}{7}$ m/s. Porém, a velocidade da partícula A é $-\frac{2}{7}$ m/s.

Resposta da questão 18:

[B]

Sendo $0,5\% = 0,005$, podemos concluir que a resposta é $70 \cdot 1,005 = 70,350$ g.

Resposta da questão 19:

[C]

Se r é a medida do raio do círculo, então a área do setor circular determinado pelo ângulo

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad é dada por

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{\pi r^2}{6}.$$

Ademais, a área do triângulo PCQ é

$$\frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}.$$

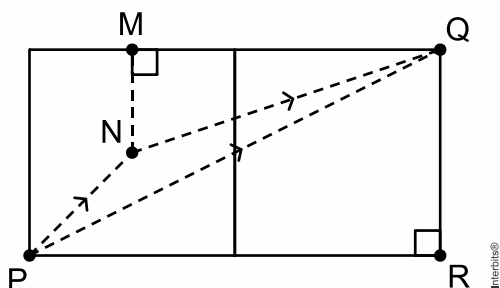
A resposta é

$$\frac{\frac{\pi r^2}{6}}{\frac{r^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{2\pi \sqrt{3}}{9}.$$

Resposta da questão 20:

[E]

Considere a figura, em que se tem a planificação de duas faces do cubo.



A distância percorrida pela partícula A é \overline{PQ} , enquanto que a distância percorrida pela partícula B é $\overline{PN} + \overline{NQ}$.

Sendo $\overline{PR} = 4$ cm e $\overline{QR} = 2$ cm, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2 \Rightarrow \overline{PQ}^2 = 4^2 + 2^2 \\ &\Rightarrow \overline{PQ} = 2\sqrt{5} \text{ cm.} \end{aligned}$$

Como $\overline{MN} = 1$ cm e $\overline{MQ} = 3$ cm, pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\begin{aligned} \overline{NQ}^2 &= \overline{MN}^2 + \overline{MQ}^2 \Rightarrow \overline{NQ}^2 = 1^2 + 3^2 \\ &\Rightarrow \overline{NQ} = \sqrt{10} \text{ cm.} \end{aligned}$$

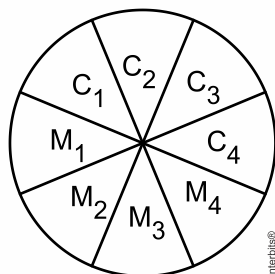
Em consequência, sendo $\overline{PN} = \sqrt{2}$ cm, temos $\overline{PN} + \overline{NQ} = (\sqrt{2} + \sqrt{10})$ cm.

A resposta é $(\sqrt{2} + \sqrt{10} - 2\sqrt{5})$ cm.

Resposta da questão 21:

[A]

Considere a figura, em que C_i e M_i denotam, respectivamente, fatias de calabresa e mozzarella.



Existem $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ modos de escolher duas fatias de calabresa e $\binom{4}{1} = 4$ maneiras de

escolher uma fatia de mozzarella. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, segue que existem $6 \cdot 4 = 24$ modos de retirar duas fatias de calabresa e uma fatia de mozzarella.

Por outro lado, os casos favoráveis são $M_1C_1C_2$ e $M_4C_4C_3$.

A resposta é $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

Resposta da questão 22:

[D]

Se $r = 0,5$, então $r \in (0, 1)$. Daí, sendo $I_0 > 0$, temos $I(t) = I_0(\sqrt{2})^t$, e como $\sqrt{2} > 1$, segue que $I(t)$ cresce conforme os dias passam.

Se $I_0 = 3$ e $r = 2,3$, então $I(t) = 3(2^{2,3})^t$. Logo, como $2^{2,3} > 1$, segue que $I(t)$ é sempre crescente.

Se $I_0 = 1$ e $r = 1$, então $I(t) = 2^t$. Logo, a cada dia que passa a quantidade de infectados dobra.

Se $I_0 = 1$ e $r = 0,5$, então $I(t) = 2^{\frac{t}{2}}$. Logo, sendo $2^9 = 512$ e $2^{10} = 1024$, podemos concluir que $I(t)$ é maior do que 1000 se t for pelo menos igual a 20 dias.

Seja $I_0 = 1$ e $r_1 = 2$. Logo, vem $I(t) = 4^t$. Supondo, por exemplo, que a taxa de contágio passasse a ser $r_2 = 3$, teríamos $I(t) = 8^t$. É imediato que $8^t > 4^t$, para todo t real positivo, ou seja, haveria mais pessoas infectadas com o passar dos dias.

Resposta da questão 23:

[C]

Os valores possíveis com dois algarismos são 51 e 60.

Os valores possíveis com três algarismos são da forma $1xy$. Assim, devemos ter $x + y = 5$.

Ora, mas o número de soluções inteiras e não negativas dessa equação é dado por

$$CR_{2,5} = \binom{6}{5} \\ = 6.$$

A resposta é $2 + 6 = 8$.

Resposta da questão 24:

[D]

Se $\overline{AB} = x$ e $\overline{AC} = y$, então, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow x^2 = y^2 + \overline{BC}^2 \\ &\Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{x^2 - y^2}.\end{aligned}$$

Como ABC e DBE são opostos pelo vértice, segue que os triângulos retângulos ABC e EBD são semelhantes por AA. Logo, sabendo que $\overline{BD} = \overline{AC}$, vem

$$\begin{aligned}\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{DE}}{y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \\ &\Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}.\end{aligned}$$

Resposta da questão 25:

[A]

A equação da reta \overline{AB} é dada por

$$y - 6 = \frac{6 - (-4)}{8 - 3} \cdot (x - 8) \Leftrightarrow y = 2x - 10.$$

Logo, pondo $y = 0$, segue que a abscissa do ponto D é

$$0 = 2x - 10 \Leftrightarrow x_D = 5.$$

O coeficiente angular da reta \overline{BC} é igual a

$$\begin{aligned}m_{\overline{BC}} &= \frac{2 - (-4)}{-1 - 3} \\ &= -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

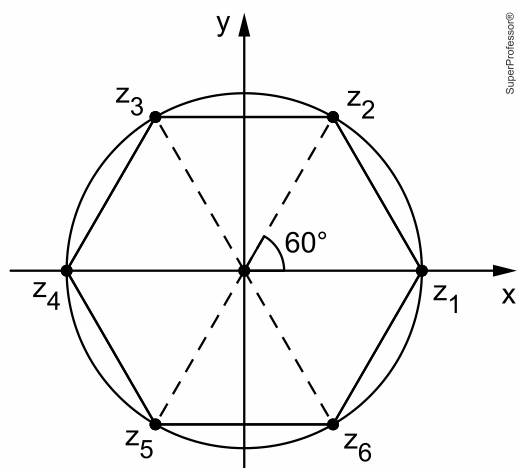
Portanto, como r e \overline{BC} são paralelas, vem $m_r = -\frac{3}{2}$, de tal sorte que a resposta é

$$y - 0 = -\frac{3}{2} \cdot (x - 5) \Leftrightarrow 3x + 2y = 15.$$

Resposta da questão 26:

[C]

Considere a figura.



O hexágono regular divide a circunferência circunscrita em seis arcos congruentes de 60° . Logo, vem $z_1 = r$, $z_2 = r(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$, $z_3 = r(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$, $z_4 = -r$, $z_5 = r(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$ e $z_6 = r(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ)$.

[1] Falsa. Na verdade, temos

$$\begin{aligned} z_2 + z_6 &= r(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) + r(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ) \\ &= r(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) + r(\cos 60^\circ - i \operatorname{sen} 60^\circ) \\ &= 2r \cdot \frac{1}{2} \\ &= r. \end{aligned}$$

[2] Verdadeira. De fato, pois

$$\begin{aligned} \overline{z_3} &= r(\cos 120^\circ - i \operatorname{sen} 120^\circ) \\ &= r(-\cos 60^\circ - i \operatorname{sen} 60^\circ) \\ &= z_5. \end{aligned}$$

[3] Falsa. Tem-se que

$$\begin{aligned} z_2 \cdot z_3 &= r(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) \cdot r(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) \\ &= r^2(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) \\ &= -r^2. \end{aligned}$$

É claro que $-r^2 \neq -r$.

[4] Verdadeira. Com efeito, pois

$$\begin{aligned} z_6^2 &= (r(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ))^2 \\ &= r^2(\cos 600^\circ + i \operatorname{sen} 600^\circ) \\ &= r^2(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) \\ &= r \cdot z_5. \end{aligned}$$

Resposta da questão 27:

[B]

A receita apurada com a venda de x calçados é igual a $28x$ reais. Logo, sabendo que o lucro mensal é dado pela diferença entre a receita e o custo total, tem-se que a resposta é $28x - 20000$.

Resposta da questão 28:

[C]

Tem-se que

$$\det A = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \theta & 7 & -\operatorname{cos} \theta \\ \operatorname{cos} \theta & 7 & \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & 13 & \operatorname{cos} \theta \end{vmatrix}$$

$$= 7 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta + 7 \operatorname{sen}^2 \theta - 13 \operatorname{cos}^2 \theta + 7 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta - 13 \operatorname{sen}^2 \theta - 7 \operatorname{cos}^2 \theta$$

$$= 7 \operatorname{sen} 2\theta - 6 \operatorname{sen}^2 \theta - 6 \operatorname{cos}^2 \theta - 14 \operatorname{cos}^2 \theta$$

$$= 7 \operatorname{sen} 2\theta - 14 \operatorname{cos}^2 \theta - 6.$$

Logo, vem

$$\det A = -13 \Leftrightarrow 7 \operatorname{sen} 2\theta - 14 \operatorname{cos}^2 \theta - 6 = -13$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{cos}^2 \theta - 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} 2\theta = \operatorname{cos} 2\theta$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} 2\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} 2\theta = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } \theta = \frac{\pi}{8}.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } \theta = \frac{5\pi}{8}.$$

Portanto, como para $k \geq 2$, temos $\theta > \pi$, segue que a resposta é $\frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$.

Resposta da questão 29:

[E]

$$\begin{cases} a + b = c^2 \\ a + b + c = 20 \end{cases}$$

$$c^2 + c = 20$$

$$c^2 + c - 20 = 0$$

$$c = \frac{-1 \pm 9}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ c = -5 \end{cases}$$

$$\therefore a + b = 4^2 \Rightarrow a + b = 16$$

Como a, b e c são números inteiros positivos, temos as seguintes triplas ordenadas (a, b, c) possíveis:

(1,15,4), (2,14,4), (3,13,4), (4,12,4), (5,11,4), (6,10,4), (7,9,4), (8,8,4), (9,7,4), (10,6,4), (11,5,4), (12,4,4), (13,3,4), (14,2,4), (15,1,4).

Resposta: 15 triplas ordenadas.

Resposta da questão 30:

[B]

Se considerarmos a altura constante teremos a seguinte relação: $m = h^2 \cdot l$, onde m é a massa, h a altura (constante) e l o índice de massa corporal.

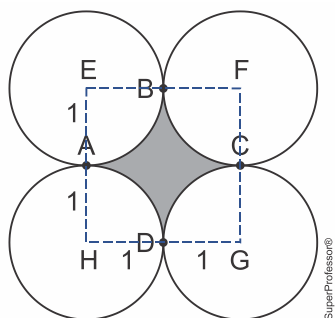
Temos, claramente uma função linear crescente, já que $h^2 > 0$

Portanto, seu gráfico é parte de uma reta crescente.

Resposta da questão 31:

[D]

A área pedida será dada pela área do quadrado EFGH, de lado 2cm e a áreas de quatro quartos de círculos, todos de raio 1 cm.

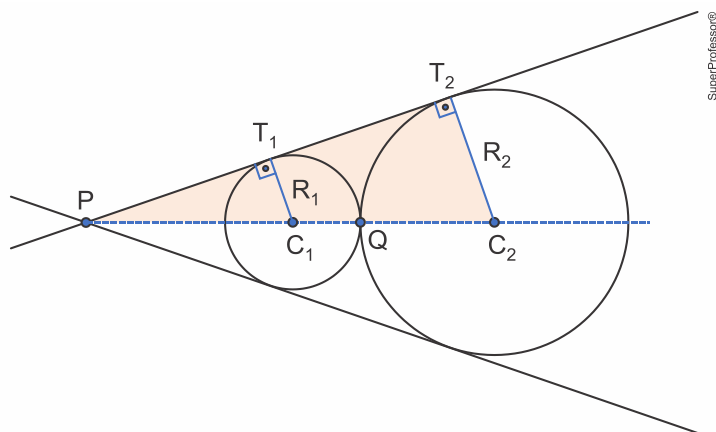


$$A = 2^2 - 4 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{4}$$

$$A = (4 - \pi) \text{cm}^2$$

Resposta da questão 32:

[E]



$\Delta PT_1C_1 \sim \Delta PT_2C_2$, logo:

$$\frac{PQ - R_1}{PQ + R_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow$$

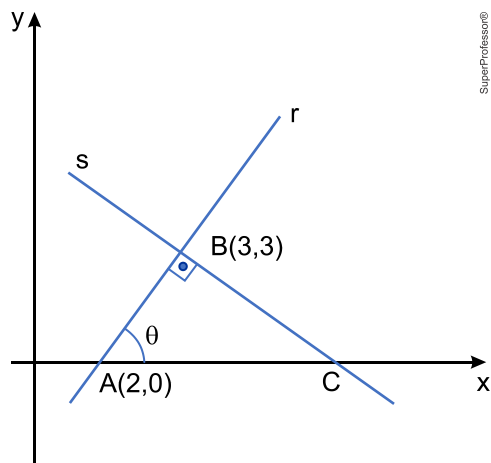
$$PQ \cdot R_2 - R_1 \cdot R_2 = PQ \cdot R_1 + R_1 \cdot R_2 \Rightarrow$$

$$PQ \cdot (R_2 - R_1) = 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \Rightarrow$$

$$PQ = \frac{2 \cdot R_1 \cdot R_2}{(R_2 - R_1)}$$

Resposta da questão 33:

[B]



Calculando o coeficiente angular da reta r , temos:

$$\operatorname{tg}\theta = m_r = \frac{3-0}{3-2} = 3$$

Calculando agora a medida do segmento \overline{AB} , temos:

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (3-0)^2}$$

$$AB = \sqrt{10}$$

Calculando a medida do segmento \overline{BC} , temos:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{BC}{AB}$$

$$3 = \frac{BC}{\sqrt{10}}$$

$$BC = 3 \cdot \sqrt{10}$$

Portanto, a área do triângulo ABC será dada por:

$$A = \frac{AB \cdot BC}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10}}{2}$$

$$A = 15$$

Resposta da questão 34:

[A]

A primeira pessoa para se sentar terá 6 opções, a segunda terá 4 opções, pois não poderá ocupar uma cadeira oposta à primeira pessoa e a terceira terá apenas duas opções, pois não poderá sentar-se em posições opostas à primeira e à segunda pessoa, portanto o número de maneiras que Ana, Beatriz e Carlos podem escolher lugares é:

$$6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$$

Resposta da questão 35:

[C]

Considerando que as medidas dos ângulos estão em P.A., podemos escrever a seguinte equação:

$$x + (x + 4^\circ) + (x + 8^\circ) + (x + 12^\circ) + \dots + (x + 19 \cdot 4^\circ) = 180^\circ \cdot (20 - 2)$$

$$20x + (4^\circ + 8^\circ + 12^\circ + \dots + 76^\circ) = 3240^\circ$$

$$20x + \frac{(4^\circ + 76^\circ) \cdot 19}{2} = 3240^\circ$$

$$20x + 760^\circ = 3240^\circ$$

$$20x = 2480^\circ$$

$$x = 124^\circ$$

$$x + 76^\circ = 200^\circ$$

Observação: Não podemos considerar este polígono convexo, mesmo citado no problema como tal, pois possui um ângulo interno maior que 180° .

Portanto, o produto pedido será:

$$124 \cdot 200 = 24.800$$

Resposta da questão 36:

[C]

Como as raízes de $q(x)$ são reais e distintas, concluímos que $b^2 - 4ac > 0$.

Desenvolvendo o determinante e considerando que $q(x) = a(x+1) \cdot (x+2)$, já que -1 e -2 são raízes de $p(x)$ e de $q(x)$, temos:

$$p(x) = (x^2 + x) \cdot (x^2 + 2x) + (x+1) \cdot (x+2) - a \cdot (x+1) \cdot (x+2) - x \cdot (x+1) \cdot (x+2)$$

$$p(x) = x \cdot (x+1) \cdot x \cdot (x+2) + (x+1) \cdot (x+2) - a \cdot (x+1) \cdot (x+2) - x \cdot (x+1) \cdot (x+2)$$

$$p(x) = (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x^2 + 1 - a - x) = 0$$

Como -1 e -2 são as únicas raízes de $p(x)$, concluímos que $(x^2 + 1 - a - x) = 0$ não possui raízes reais, logo:

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-1)^2 - 4 \cdot (1-a) < 0 \Rightarrow -3 + 4a < 0 \Rightarrow a < \frac{3}{4}$$

Resposta da questão 37:

[A]

Calculando, inicialmente, o volume do cone, temos:

$$V = \frac{12 \cdot h}{3} = 4h$$

Considerando $v(t) = \frac{4h}{2}$, temos:

$$\frac{4h}{2} = \log_2(t^2 + 1)$$

$$2h = \log_2(t^2 + 1)$$

$$t^2 + 1 = 2^{2h}$$

$$t^2 = 2^{2h} - 1$$

$$t = \sqrt{4^h - 1}$$

Resposta da questão 38:

[D]

Considere que x representa a numeração do degrau onde Beatriz estava, podemos, de acordo com as informações do problema, estabelecer a seguinte equação:

$$x - 6 + 12 + 5 = 32$$

$$x + 11 = 32$$

$$x = 21$$

Portanto, Beatriz estava, inicialmente, no vigésimo primeiro degrau.

Resposta da questão 39:

[E]

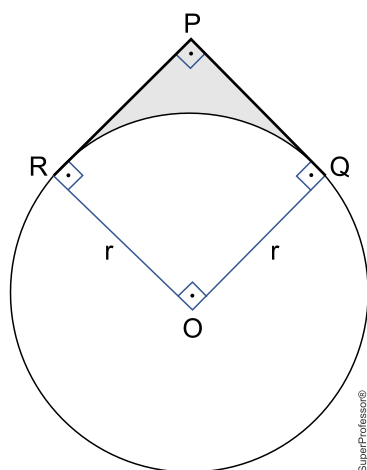
Para os três primeiros dígitos temos 3! possibilidades, já que se deve ter os algarismos 4, 6 e 8 e para o quarto dígito, que deverá ser um número ímpar, temos 5 possibilidades (1, 3, 5, 7 e 9).

Logo, o número de senhas será dado por:

$$3! \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$$

Resposta da questão 40:

[C]



Admitindo que a circunferência tenha centro no ponto O e raio r , tem $OR \perp PR$ e $OQ \perp PQ \Rightarrow \widehat{RÔQ} = 90^\circ$ e $PROQ$ é um quadrado de lado r .

Considerando o perímetro da região assinalada, podemos escrever que:

$$r + r + \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{4} = 2 \cdot \pi + 8 \quad (\times 2)$$

$$4r + \pi \cdot r = 4 \cdot \pi + 16$$

$$r \cdot (4 + \pi) = 4 \cdot (4 + \pi)$$

$$r = 4 \text{ cm}$$

Resposta da questão 41:

[C]

$$f(x) = q(p(x))$$

$$f(x) = (x + a)^2 - b$$

$$f(x) = x^2 + 2ax + a^2 - b$$

Considerando a soma e o produto das raízes, temos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2a}{1} \Rightarrow -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2 - b}{1} \Rightarrow 4 \cdot (a^2 - b) = 1 \Rightarrow a^2 - b = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - b = \frac{1}{4} \Rightarrow b = 0$$

Logo,

$$a + b = -\frac{1}{2}$$

Resposta da questão 42:

[E]

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin(2x)$$

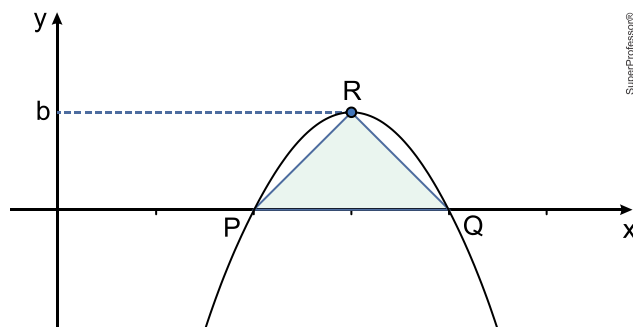
$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \frac{3}{5}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{8}{5}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1,6$$

Resposta da questão 43:

[A]



Determinando as raízes da função $f(x) = -x^2 + 6x - 8$

$$-x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 4.$$

Logo, $P(2, 0)$ e $A(Q, 0)$

A área do triângulo de base $PQ = 4 - 2 = 2$ será máxima quando b for igual a ordenada do vértice.

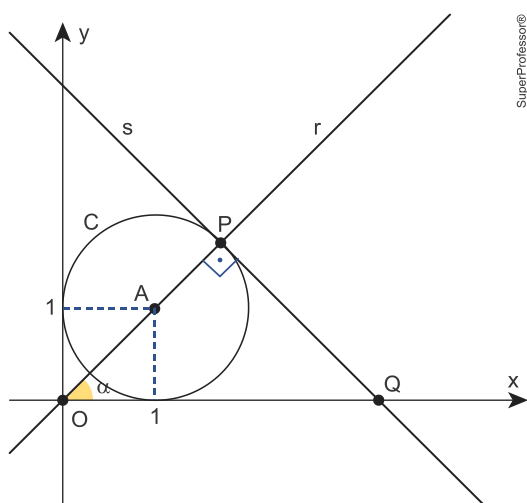
$$b = -\frac{\Delta}{4 \cdot a} \Rightarrow b = \frac{-4}{4 \cdot (-1)} \Rightarrow b = 1.$$

Logo, a área do triângulo PQR será:

$$A = \frac{2 \cdot 1}{2} \Rightarrow A = 1$$

Resposta da questão 44:

[E]



Coefficiente angular da reta r .

$$m = \frac{1-0}{1-0} \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

No triângulo OPQ:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{OP}{OQ} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{OA + AP}{OQ} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{OQ} \Rightarrow OQ = \frac{2 \cdot (\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$OQ = 2 + \sqrt{2}$$

Logo, a abscissa do ponto Q será:

$$x_Q = 2 + \sqrt{2}$$

Resposta da questão 45:

[D]

Determinado, inicialmente, a temperatura inicial:

$$T(t) = 30 + 150a^{-0,05t}$$

$$T(0) = 30 + 150a^{-0,05 \cdot 0}$$

$$T(0) = 30 + 150$$

$$T(0) = 180^\circ\text{C}$$

Considerando a metade da temperatura inicial, temos:

$$90 = 30 + 150a^{-0,05t}$$

$$60 = 150a^{-0,05t}$$

$$a^{-0,05t} = \frac{60}{150}$$

$$a^{-0,05t} = \frac{2}{5}$$

$$\log_a a^{-0,05t} = \log_a \frac{2}{5}$$

$$-0,05t = \log_a 2 - \log_a 5$$

$$-0,05t = 0,7 - 1,6$$

$$-0,05t = -0,9$$

$$t = 18 \text{ min}$$

Resposta da questão 46:

[A]

Sabendo que a razão entre os raios dos cones maior e menor é $\sqrt[3]{7}$. Podemos considerar que a razão entre os volumes será $(\sqrt[3]{7})^3 = 7$. Admitindo que v seja o volume do cone menor, temos a seguinte equação:

$$v + v \cdot q + v \cdot q^2 = 7 \cdot v$$

$$1 + q + q^2 = 7$$

$$q^2 + q - 6 = 0$$

$$q = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

$$q = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow q = 2 \text{ ou } q = -3$$

Considerando que $q > 0$, devemos considerar $q = 2$.